

01190 /



DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO

Facultad De Ingeniería

PROPIEDADES DE PROPAGACIÓN DE ESQUEMAS NUMÉRICOS PARA LA SIMULACIÓN DE FLUJOS A SUPERFICIE LIBRE

ARIOSTO AGUILAR CHÁVEZ

TESIS DOCTORAL

PRESENTADA A LA DIVISIÓN DE ESTUDIOS
DE POSGRADO DE LA

FACULTAD DE INGENIERÍA
DE LA

**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE
MÉXICO**

COMO REQUISITO PARA OBTENER EL GRADO DE

DOCTOR EN INGENIERÍA

Ciudad Universitaria
2002

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

ESTA TESIS NO SALE
DE LA BIBLIOTECA

ELIOT
MAY 21 1914

Un agradecimiento al doctor Álvaro A. Aldama Rodríguez por dirigir y sustentar este documento y un reconocimiento respetuoso a los doctores

Nahun Hamed García Villanueva
F. Javier Aparicio Mijares
Poliopetro F. Martínez Austria
Carlos Fuentes Ruiz
Hermilo Ramírez León
Jaime Collado

Al Instituto Mexicano de Tecnología del Agua



ÍNDICE

RESUMEN	1
ABSTRACT	5
1. INTRODUCCIÓN	9
1.1. ESTADO DEL ARTE	10
1.2. OBJETIVO Y ALCANCE DE LA INVESTIGACIÓN	14
2. ECUACIONES DIFERENCIALES DE FLUJO A SUPERFICIE LIBRE	18
2.1. ECUACIONES GENERALES DE FLUJO	19
2.2. ECUACIONES INTEGRADAS EN LA VERTICAL	25
2.3. ECUACIONES DE FLUJO A SUPERFICIE LIBRE	29
3. METODOLOGÍA PARA EL ANÁLISIS DE PROPIEDADES DE PROPAGACIÓN	40
3.1. PROBLEMAS DE VALOR INICIAL	40
3.2. APROXIMACIONES NUMÉRICAS	41
3.2.1. <i>Discretización</i>	43
3.2.2. <i>Consistencia, orden de aproximación y convergencia</i>	44
3.2.3. <i>Análisis de estabilidad</i>	45
3.3. PROPAGACIÓN DE PERTURBACIONES	46
3.3.1. <i>Derivada de Fréchet</i>	46
3.3.2. <i>Expansiones en serie de Fréchet-Taylor</i>	47
3.3.3. <i>Escalas múltiples y localización</i>	49
3.4. PROBLEMAS LINEALES DE VALOR INICIAL	55
3.4.1. <i>Análisis de Fourier de problemas continuos de valor inicial</i>	58
3.4.2. <i>Análisis de Fourier de problemas discretos de valor inicial</i>	62
4. DETERMINACIÓN DE PROPIEDADES DE PROPAGACIÓN DE SISTEMAS CONTINUOS	75
4.1. ECUACIONES DE SAINT-VENANT CONSERVATIVAS	75



4.1.1. Construcción del sistema perturbado de las ecuaciones de Saint-Venant, versión integrodiferencial	75
4.1.2. Construcción del sistema perturbado de las ecuaciones de Saint-Venant versión diferencial	82
4.1.3. Análisis de escalas múltiples y localización	85
4.1.4. Análisis de estabilidad	93
4.2. ECUACIONES DE SAINT-VENANT NO CONSERVATIVAS	96
4.2.1. Construcción del sistema perturbado	96
4.2.2. Análisis de escalas múltiples y localización	99
4.2.3 Análisis de estabilidad	104
5. ANÁLISIS DEL ESQUEMA DE PREISSMANN	106
5.1. ANÁLISIS DE CONSISTENCIA	107
5.2. CONSTRUCCIÓN DEL SISTEMA PERTURBADO	113
5.3. ANÁLISIS DE LOCALIZACIÓN	117
5.4. ANÁLISIS DE ESTABILIDAD	121
5.5. RETRATOS DE AMPLITUD Y FASE	127
5.6. ANÁLISIS DE CONVERGENCIA DEL MÉTODO DE PICARD	148
5.7. ANÁLISIS DE CONVERGENCIA DEL MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON	162
5.8. PRUEBAS NUMÉRICAS	174
5.8.1. Programación del esquema con la metodología de Picard	174
5.8.2 Programación del esquema con la metodología de Newton-Raphson	179
5.8.3 Verificación numérica	181
6. ANÁLISIS DEL ESQUEMA DE LEENDERTSE	198
6.1. ANÁLISIS DE CONSISTENCIA	199
6.2. CONSTRUCCIÓN DEL SISTEMA PERTURBADO	203
6.3. ANÁLISIS DE LOCALIZACIÓN	207
6.4. ANÁLISIS DE ESTABILIDAD	213
6.5. ELABORACIÓN DE RETRATOS DE AMPLITUD Y FASE	214
6.6. PRUEBAS NUMÉRICAS	224
6.6.1. Programación del esquema	224
6.6.2. Verificación numérica	227
7. FORMULACIÓN DE LA ECUACIÓN DE CONTINUIDAD GENERALIZADA DE ONDA (GWCE)	230
7.1. DETERMINACIÓN DE LA PROPAGACIÓN DE PERTURBACIONES DEL SISTEMA CONTINUO	233
7.1.1. Construcción del sistema perturbado	233
7.1.2. Análisis de localización	236



7.1.3. <i>Análisis de estabilidad</i>	245
7.1.4. <i>Evaluación de la conservación masa</i>	246
7.2. DETERMINACIÓN DE LA PROPAGACIÓN DE PERTURBACIONES EN ELEMENTO FINITO	249
7.2.1. <i>Construcción de la forma residual pesada</i>	249
7.2.2. <i>Discretización espacial de Galerkin</i>	250
7.2.3. <i>Discretización temporal</i>	258
7.2.4. <i>Análisis de consistencia</i>	259
7.2.5. <i>Construcción del sistema perturbado</i>	268
7.2.6. <i>Análisis de localización</i>	273
7.2.7. <i>Análisis de estabilidad</i>	276
7.2.8. <i>Elaboración de retratos de amplitud y fase</i>	281
7.2.9. <i>Pruebas numéricas</i>	289
7.2.9.1. Programación del esquema	289
7.2.9.2. Verificación numérica	296

8. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES **299**

BIBLIOGRAFÍA **304**

ANEXOS **308**



ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 5.1.	Condiciones topológicas y de flujo subcrítico	128
Tabla 5.2.	Clasificación de los retratos de amplitud para flujo subcrítico del esquema de Preissmann.	128
Tabla 5.3.	Condiciones topológicas y de flujo supercrítico	129
Tabla 5.4.	Clasificación de los retratos de amplitud para flujo supercrítico del esquema de Preissmann.	129
Tabla 5.5.	Clasificación de las pruebas de iso-estabilidad del esquema de Preissmann.	130
Tabla 5.6.	Clasificación de los retratos de fase para flujo subcrítico del esquema de Preissmann.	130
Tabla 5.7.	Clasificación de los retratos de fase para flujo supercrítico del esquema de Preissmann.	131
Tabla 5.8.	Clasificación de los retratos de amplitud para flujo subcrítico del esquema de Preissmann bajo la iteración de Picard.	155
Tabla 5.9.	Clasificación de los retratos de amplitud para flujo supercrítico del esquema de Preissmann bajo la iteración de Picard.	155
Tabla 5.10.	Clasificación de los retratos de amplitud para flujo subcrítico del esquema de Preissmann bajo la iteración de Newton-Raphson.	168
Tabla 5.11.	Clasificación de los retratos de amplitud para flujo supercrítico del esquema de Preissmann bajo la iteración de Newton-Raphson.	169
Tabla 5.12.	Resultado de estabilidad y convergencia de la Prueba Fs01PrPi.	185
Tabla 5.13.	Resultado de estabilidad y convergencia de la Prueba Fs02PrPi.	185
Tabla 5.14.	Resultado de estabilidad y convergencia de la Prueba Fs03PrPi.	186
Tabla 5.15.	Resultado de estabilidad y convergencia de la Prueba Fs04PrPi.	186
Tabla 5.16.	Resultado de estabilidad y convergencia de la Prueba Fs05PrPi.	187
Tabla 5.17.	Resultado de estabilidad y convergencia de la Prueba Fs06PrPi.	187
Tabla 5.18.	Resultado de estabilidad y convergencia de la Prueba Fs01PrNe.	188
Tabla 5.19.	Resultado de estabilidad y convergencia de la Prueba Fs02PrNe.	188
Tabla 5.20.	Resultado de estabilidad y convergencia de la Prueba Fs03PrNe.	189
Tabla 5.21.	Resultado de estabilidad y convergencia de la Prueba Fs04PrNe.	189
Tabla 5.22.	Resultado de estabilidad y convergencia de la Prueba Fs05PrNe.	190
Tabla 5.23.	Resultado de estabilidad y convergencia de la Prueba Fs06PrNe.	190
Tabla 5.24.	Resultado de estabilidad y convergencia de la Prueba Ft01PrPi.	191
Tabla 5.25.	Resultado de estabilidad y convergencia de la Prueba Ft02PrPi.	192
Tabla 5.26.	Resultado de estabilidad y convergencia de la Prueba Ft03PrPi.	192
Tabla 5.27.	Resultado de estabilidad y convergencia de la Prueba Ft04PrPi.	193
Tabla 5.28.	Resultado de estabilidad y convergencia de la Prueba Ft05PrPi.	193
Tabla 5.29.	Resultado de estabilidad y convergencia de la Prueba Ft06PrPi.	194
Tabla 5.30.	Resultado de estabilidad y convergencia de la Prueba Ft01PrNe.	194
Tabla 5.31.	Resultado de estabilidad y convergencia de la Prueba Ft02PrNe.	195
Tabla 5.32.	Resultado de estabilidad y convergencia de la Prueba Ft03PrNe.	195
Tabla 5.33.	Resultado de estabilidad y convergencia de la Prueba Ft04PrNe.	196
Tabla 5.34.	Resultado de estabilidad y convergencia de la Prueba Ft05PrNe.	196
Tabla 5.35.	Resultado de estabilidad y convergencia de la Prueba Ft06PrNe.	197
Tabla 6.1.	Clasificación de los retratos de amplitud para flujo subcrítico del esquema Leendertse.	215
Tabla 6.2.	Clasificación de los retratos de fase para flujo subcrítico del esquema Leendertse.	215
Tabla 6.3.	Clasificación de los retratos de amplitud para flujo supercrítico del esquema Leendertse.	216



Propiedades de Propagación de Esquemas Numéricos para la Simulación de Flujos a Superficie Libre

Tabla 6.4.	Clasificación de los retratos de fase para flujo supercrítico del esquema Leendertse.	216
Tabla 6.5.	Escenarios de condición inicial para las pruebas numéricas del esquema de Leendertse.	228
Tabla 6.6.	Resultado de estabilidad para la Prueba Fs01Le.	228
Tabla 6.7.	Resultado de estabilidad para la Prueba Fs02Le.	228
Tabla 6.8.	Resultado de estabilidad para la Prueba Fs04Le.	229
Tabla 6.9.	Resultado de estabilidad para la Prueba Fs05Le.	229
Tabla 7.1.	Clasificación de los retratos de amplitud para flujo subcrítico de la formulación GWCE.	281
Tabla 7.2.	Clasificación de los retratos de amplitud para flujo supercrítico de la formulación GWCE.	282
Tabla 7.3.	Clasificación de los retratos de fase para flujo subcrítico de la formulación GWCE.	282
Tabla 7.4.	Clasificación de los retratos de fase para flujo supercrítico de la formulación GWCE.	282
Tabla 7.5.	Resultados de estabilidad y convergencia de la Prueba Fs01GW.	297
Tabla 7.6.	Resultados de estabilidad y convergencia de la Prueba Fs02GW.	297
Tabla 7.7.	Resultados de estabilidad y convergencia de la Prueba Fs03GW.	297
Tabla B.1.	Clasificación de par de Fourier	318



ÍNDICE DE LÁMINAS

Lámina 2.1.	Región material en movimiento.	20
Lámina 2.2.	Región material para la ecuación de cantidad de movimiento.	21
Lámina 2.3.	Variación de la velocidad vertical.	27
Lámina 2.4.	Espacio de integración de la sección transversal de un cauce.	30
Lámina 2.5.	Diagrama de cuerpo libre y características de la sección transversal de un canal.	33
Lámina 3.1.	Delimitación del volumen de control de la norma l_2 .	43
Lámina 5.1.	Representación en el plano $x - t$ del esquema de Preissmann (Box Scheme).	108
Lámina 5.2.	Caso Ret_amp_Fs01Pr.	131
Lámina 5.3.	Caso Ret_amp_Fs02Pr.	132
Lámina 5.4.	Caso Ret_amp_Fs03Pr.	132
Lámina 5.5.	Caso Ret_amp_Fs04Pr.	133
Lámina 5.6.	Caso Ret_amp_Fs05Pr.	133
Lámina 5.7.	Caso Ret_amp_Fs06Pr.	134
Lámina 5.8.	Caso Ret_amp_Ft01Pr.	134
Lámina 5.9.	Caso Ret_amp_Ft02Pr.	135
Lámina 5.10.	Caso Ret_amp_Ft03Pr.	135
Lámina 5.11.	Caso Ret_amp_Ft04Pr.	136
Lámina 5.12.	Caso Ret_amp_Ft05Pr.	136
Lámina 5.13.	Caso Ret_amp_Ft06Pr.	137
Lámina 5.14.	Caso max_ρ_01.	137
Lámina 5.15.	Caso max_ρ_02.	138
Lámina 5.16.	Caso max_ρ_03.	138
Lámina 5.17.	Caso max_ρ_04.	139
Lámina 5.18.	Caso max_ρ_05.	139
Lámina 5.19.	Caso max_ρ_06.	140
Lámina 5.20.	Caso max_ρ_07.	140
Lámina 5.21.	Caso max_ρ_08.	141
Lámina 5.22.	Caso max_ρ_09.	141
Lámina 5.23.	Caso Ret_fas_Fs01Pr.	142
Lámina 5.24.	Caso Ret_fas_Fs02Pr.	142
Lámina 5.25.	Caso Ret_fas_Fs03Pr.	143
Lámina 5.26.	Caso Ret_fas_Fs04Pr.	143
Lámina 5.27.	Caso Ret_fas_Fs05Pr.	144
Lámina 5.28.	Caso Ret_fas_Fs06Pr.	144
Lámina 5.29.	Caso Ret_fas_Ft01Pr.	145
Lámina 5.30.	Caso Ret_fas_Ft02Pr.	145
Lámina 5.31.	Caso Ret_fas_Ft03Pr.	146
Lámina 5.32.	Caso Ret_fas_Ft04Pr.	146
Lámina 5.33.	Caso Ret_fas_Ft05Pr.	147
Lámina 5.34.	Caso Ret_fas_Ft06Pr.	147
Lámina 5.35.	Caso Ret_amp_Fs01PrPi.	156
Lámina 5.36.	Caso Ret_amp_Fs02PrPi.	156
Lámina 5.37.	Caso Ret_amp_Fs03PrPi.	157
Lámina 5.38.	Caso Ret_amp_Fs04PrPi.	157
Lámina 5.39.	Caso Ret_amp_Fs05PrPi.	158
Lámina 5.40.	Caso Ret_amp_Fs06PrPi.	158
Lámina 5.41.	Caso Ret_amp_Ft01PrPi.	159



Propiedades de Propagación de Esquemas Numéricos para la
Simulación de Flujos a Superficie Libre

Lámina 5.42.	Caso Ret_amp_Ft02PrPi.	159
Lámina 5.43.	Caso Ret_amp_Ft03PrPi.	160
Lámina 5.44.	Caso Ret_amp_Ft04PrPi.	160
Lámina 5.45.	Caso Ret_amp_Ft05PrPi.	161
Lámina 5.46.	Caso Ret_amp_Ft06PrPi.	161
Lámina 5.47.	Caso Ret_amp_Fs01PrNe.	169
Lámina 5.48.	Caso Ret_amp_Fs02PrNe.	170
Lámina 5.49.	Caso Ret_amp_Fs03PrNe.	170
Lámina 5.50.	Caso Ret_amp_Fs04PrNe.	171
Lámina 5.51.	Caso Ret_amp_Fs05PrNe.	171
Lámina 5.52.	Caso Ret_amp_Ft01PrNe.	172
Lámina 5.53.	Caso Ret_amp_Ft02PrNe.	172
Lámina 5.54.	Caso Ret_amp_Ft03PrNe.	173
Lámina 5.55.	Caso Ret_amp_Ft04PrNe.	173
Lámina 5.56.	Caso Ret_amp_Ft05PrNe.	174
Lámina 5.57.	Condición de frontera izquierda para el gasto, hidrograma triangular.	184
Lámina 6.1.	Caso Ret_amp_Fs01Le.	217
Lámina 6.2.	Caso Ret_amp_Fs02Le.	217
Lámina 6.3.	Caso Ret_amp_Fs03Le.	218
Lámina 6.4.	Caso Ret_amp_Fs04Le.	218
Lámina 6.5.	Caso Ret_amp_Ft01Le.	219
Lámina 6.6.	Caso Ret_amp_Ft02Le.	219
Lámina 6.7.	Caso Ret_amp_Ft03Le.	220
Lámina 6.8.	Caso Ret_fas_Fs01Le.	220
Lámina 6.9.	Caso Ret_fas_Fs02Le.	221
Lámina 6.10.	Caso Ret_fas_Fs03Le.	221
Lámina 6.11.	Caso Ret_fas_Fs04Le.	222
Lámina 6.12.	Caso Ret_fas_Ft01Le.	222
Lámina 6.13.	Caso Ret_fas_Ft02Le.	223
Lámina 6.14.	Caso Ret_fas_Ft03Le.	223
Lámina 7.1.	Funciones de interpolación de ϕ_1 y ϕ_2 para un elemento (l) visto en forma local.	255
Lámina 7.2.	Ensamblado global de matrices y reacomodo de subíndices.	256
Lámina 7.3.	Caso Ret_amp_Fs01Gw.	283
Lámina 7.4.	Caso Ret_amp_Fs02Gw.	283
Lámina 7.5.	Caso Ret_amp_Fs03Gw.	284
Lámina 7.6.	Caso Ret_amp_Ft01Gw.	284
Lámina 7.7.	Caso Ret_amp_Ft02Gw.	285
Lámina 7.8.	Caso Ret_amp_Ft03Gw.	285
Lámina 7.9.	Caso Ret_fas_Fs01Gw.	286
Lámina 7.10.	Caso Ret_fas_Fs02Gw.	286
Lámina 7.11.	Caso Ret_fas_Fs03Gw.	287
Lámina 7.12.	Caso Ret_fas_Ft01Gw.	287
Lámina 7.13.	Caso Ret_fas_Ft02Gw.	288
Lámina 7.14.	Caso Ret_fas_Ft03Gw.	288
Lámina B.1.	Valores de muestreo	316
Lámina B.2.	Representación discreta de Fourier	316

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

RECEIVED
MAY 19 1967
FEDERAL BUREAU OF INVESTIGATION
WASHINGTON, D. C.



RESUMEN

Se presenta una metodología general para determinar las propiedades de propagación a problemas de valor inicial continuos y discretos, tomando en cuenta los efectos no lineales dominantes. Además, mediante ejemplos aplicables, dichas propiedades se relacionan con los conceptos de consistencia, estabilidad y convergencia de aproximaciones discretas de ecuaciones de evolución.

La metodología para estudiar las propiedades de propagación tiene la secuencia siguiente: analizar la propagación de perturbaciones en el problema de valor inicial continuo, para las variables dependientes, y en el caso de los términos no lineales o con dependencia paramétrica aplicar una expansión de Fréchet-Taylor. Posteriormente, realizar un análisis de escalas múltiples y localización. Con el sistema localizado, aplicar el método de Fourier, a fin de obtener su relación de dispersión y su límite de estabilidad.

En el problema de valor inicial se propone una estrategia de discretización en diferencias finitas o elemento finito, y se verifica su consistencia mediante la aplicación de expansiones en serie de Taylor al sistema discreto, alrededor de un punto particular de la malla. Teniendo como resultado la ecuación diferencial original adicionada de un remanente que debe reducirse a cero cuando la malla es refinada *ad infinitum*, lo cual implica que el esquema discreto es consistente. Se practica después un análisis de propagación de perturbaciones sobre las variables dependientes discretas. Para los términos no lineales o con dependencia paramétrica se aplica una expansión de Fréchet-Taylor, además de un análisis de escalas múltiples y de localización, con lo cual se obtiene el sistema discreto lineal localizado. Finalmente, se aplica el método de Fourier para evaluar el comportamiento de la estabilidad del sistema discreto linealizado, y se hace uso de expansiones discretas de Fourier para determinar las condiciones de estabilidad del sistema discreto. La relación de dispersión discreta permite determinar los retratos de amplitud y fase, que caracterizan el esquema en función del número de onda y de las condiciones del flujo.

La metodología se aplicó al análisis de propagación de perturbaciones en los esquemas de Preissmann, Leendertse y formulación de la GWCE (*Generalized Wave Continuity Equation*) para las ecuaciones de flujo a superficie libre en una dimensión. Por lo que respecta al esquema de Preissmann, se determinan las



condiciones de estabilidad, los errores de fase, la amplitud y las propiedades de convergencia de iteraciones no lineales. Para el esquema de Leendertse y la formulación GWCE, se determinan las propiedades de estabilidad y los errores de amplitud y fase. Se incluyen pruebas numéricas a fin de validar los resultados teóricos de la aplicación de esta metodología.

Se demuestra que el análisis de propagación de perturbaciones, con la metodología propuesta, constituye una herramienta que permite comprender los efectos no lineales dominantes en el comportamiento de las ecuaciones discretizadas asociadas con la simulación del flujo a superficie libre, y también permite evaluar las ventajas que se tienen al seleccionar adecuadamente el método para la solución numérica iterativa de las ecuaciones no lineales en diferencias.

Dada la generalidad del método de propagación de perturbaciones, se incluye un estudio para definir y establecer los criterios de estabilidad de flujos por efecto del surgimiento de fenómenos oscilatorios, como son las ondas rodantes que se presentan en régimen supercrítico (Chow, 1959; Ponce y Simmons, 1977; Ponce y Maisner, 1993). Además, se evalúa la conservación de masa en la formulación generalizada de onda GWCE (Kinnmark y Gray, 1988; Chippada, *et al.*, 1997).

Por otra parte, esta metodología permite realizar un análisis de convergencia de iteraciones para la solución de los sistemas de ecuaciones discretas no lineales, ya sea por el método de Picard (Aldama y Paniconi, 1991) o por el de Newton-Raphson (Burden y Faires, 1980; Paniconi *et al.*, 1991), esto se logra dando un tratamiento al esquema discretizado, al estudiar la propagación de errores de una iteración a otra. Para determinar la condición de convergencia, se considera que el factor de amplificación del error debe ser estrictamente menor que uno en valor absoluto (Tingsanchali *et al.*, 1989; Aldama y Paniconi, 1991; Paniconi *et al.*, 1991).

Con esta metodología se buscó contribuir al conocimiento respectivo y complementar los estudios que se han llevado a cabo para la determinación de los límites de estabilidad, propagación de amplitudes y fases, así como convergencia de iteraciones no lineales, ya que en la mayoría de los casos son incompletos o están simplificados en demasía (Abbott 1979; Kinnmark, 1986; Lyn *et al.*, 1987 y Meselhe, 1997).

Conocer con antelación las propiedades de propagación de un esquema numérico para solucionar ecuaciones diferenciales parciales, formaliza la manera de discretizar y asegura un mejor resultado. De ese modo, al contar con un criterio basado en un análisis de propagación de perturbaciones, previo a la programación, permite tener una mayor certidumbre de los límites de su aplicación.



Los resultados generales de los ejemplos que se probaron son la determinación del límite de convergencia del sistema continuo de las ecuaciones diferenciales parciales no conservativas unidimensionales de Saint-Venant, donde se determinó que la condición de estabilidad se presenta cuando el número de Vedernikov es menor a la unidad, $|V_e| \leq 1$. Para la versión no conservativa de Saint-Venant, se hizo el análisis de convergencia del modelo que resulta al aplicar el esquema de Leendertse. Los resultados indican que este esquema tiene problemas para flujo supercrítico ($F_r > 1$). Además, con base en las pruebas numéricas, se comprobó que al tener valores del número de Froude cercanos a $1 < F_r$ y números de Courant $C_r > 5$, el esquema de Leendertse presenta problemas de estabilidad.

Además de revisarse la versión no conservativa, se estudió la versión conservativa de las ecuaciones de Saint-Venant en su formas integral y diferencial. Al desarrollar el sistema continuo se determinó que el rango de estabilidad del sistema continuo unidimensional está definido por $|V_e| \leq 1$.

Con el sistema de ecuaciones conservativas de Saint-Venant, se analizó una discretización basada en un esquema conocido como de caja (*Box scheme*, en inglés) o de Preissmann (Abbott, 1979; Cunge *et al.*, 1980). El resultado del análisis de convergencia tiene diferentes condiciones de estabilidad: $|V_e| \leq 1$, $\psi = 1/2$ y $\theta \geq 1/2$, donde ψ y θ son los factores de discretización de peso espacial y temporal respectivamente. Por otra parte, se determinó que para las condiciones de flujo en que $C_r \geq 30$, si se aplica la metodología iterativa de Picard para la actualización de los terminos no lineales, se tienen problemas de convergencia numérica para los casos de flujo subcrítico y supercrítico. Por tanto, se analizó la posibilidad de dar un tratamiento especial para la solución numérica de los términos no lineales, utilizando el método de Newton-Raphson, lo que dio como resultado, tanto en forma teórica como en las pruebas numéricas, una mejora en la convergencia de los términos no lineales para valores de $C_r \geq 30$, para flujo subcrítico o supercrítico.

Para el caso de la simulación del flujo de aguas someras se planteó el análisis de la Ecuación de Continuidad Generalizada de Onda (GWCE), (Westerink *et al.*, 1987; Luettich *et al.*, 1991), la cual fue propuesta por Lynch y Gray, (1979) para eliminar algunos problemas de oscilaciones espurias, resultados de la discretización en elemento finito. Según se enuncia en la literatura, la aplicación de la GWCE es satisfactoria, aunque en ciertas condiciones de simulación se tienen problemas de conservación de masa de la GWCE.

Con el fin de evaluar este problema, se realizó un análisis de propagación de perturbaciones de la versión continua conservativa de la formulación GWCE,



por medio de la metodología propuesta. Se demostró que esta formulación es estable para $|V_e| \leq 1$, con la salvedad de que el término de filtrado que se usa para eliminar las oscilaciones espurias induce a que la formulación de la GWCE presente un problema de conservación de masa de un nodo de discretización a otro, para valores grandes del número de onda y valores relativamente pequeños del término de filtrado (Aldama *et al.*, 1999). Además, para complementar el estudio de la formulación GWCE en su versión discreta, se planteó un esquema en elemento finito para la dimensión espacial, por el método de residuos pesados de Galerkin (Reddy, 1991) y diferencias finitas para la dimensión temporal, y después de aplicar la metodología que se ha mencionado con anterioridad se encontró, con base en los retratos de fase y amplitud y pruebas numéricas, que este esquema es estable para flujo subcrítico, para valores de $C_r < 50$, pero que es incondicionalmente inestable para flujo supercrítico.



ABSTRACT

A general methodology is presented to determine the propagation properties to continuous and discrete initial value problems, taking into account the dominant nonlinear effects. In addition, by means of applicable examples, these properties are related to the concepts of consistency, stability and convergence of discrete approaches of evolution equations.

The methodology to study the propagation properties has the following sequence: to analyze the propagation of perturbations in the continuous initial value problem, for dependent variables, and in the case of nonlinear terms or those with parametric dependency to apply a Fréchet-Taylor expansion. Next, to perform an analysis of multiple scales and location. With the located system, to apply Fourier's method, in order to obtain its dispersion ratio and its stability limit.

In the initial value problem, a strategy of discretization in finite differences or finite element is proposed, and its consistency by means of the application of Taylor's series expansions to the discrete system is verified, around a particular point of the mesh. This gives as a result the original differential equation added with a remnant that must be reduced to zero when the mesh is refined *ad infinitum*, which implies that the discrete scheme is consistent. A propagation analysis is then performed on the discrete dependent variables. For nonlinear terms or for those with parametric dependency, a Fréchet-Taylor expansion is applied, in addition to an analysis of multiple scales and location, with which the located linear discrete system is obtained. Finally, Fourier's method is applied to evaluate the behavior of the stability of the linearized discrete system, and Fourier's discrete expansions have used to determine the conditions of stability of the discrete system. The discrete dispersion ratio allows to determine the amplitude and phase portraits, that characterize the scheme based on wave number and flow conditions.

The methodology was applied to perturbations propagation analysis in Preissmann and Leendertse schemes and to the formulation of the Generalized Wave Continuity Equation (GWCE) for the equations of flow to free surface in a dimension. With regards to Preissmann scheme, the stability conditions, the phase errors, the amplitude and the convergence properties of nonlinear iterations are determined. As Leendertse scheme and GWCE formulation properties stability and amplitude and phase errors are determined. Numerical



tests are included in order to validate the theoretical results of the application of this methodology.

It is demonstrated that perturbation propagation analysis, performed with the proposed methodology, constitutes a tool that helps understand the dominant nonlinear effects in the behavior of discretized equations associated to the simulation of flow to free surface. It also helps to assess the advantages of adequately selecting the method for the iterative numeric solution of nonlinear equations in differences.

Given the broadness of the perturbation propagation method, a study is included to define and establish the stability criteria of flows due to the emergence of oscillatory phenomena, such as rolling waves that appear in supercritical regime (Chow, 1959; Ponce and Simmons, 1977; Ponce and Maisner, 1993). In addition, mass conservation in the GWCE is assessed (Kinnmark and Gray, 1988; Chippada, *et al.*, 1997).

On the other hand, with this methodology, an iteration convergence analysis can be performed for the solution of discrete and nonlinear equation systems either by Picard's method (Aldama and Paniconi, 1991) or by Newton-Raphson's method (Burden and Faires, 1980; Paniconi, *et al.*, 1991). This is achieved by giving treatment to the discretized scheme when studying error propagation from one iteration to another. In order to determine the condition of convergence, it is considered that the amplification factor of the error should be strictly less than one in absolute value (Tingsanchali *et al.*, 1989; Aldama and Paniconi, 1991; Paniconi *et al.*, 1991).

This methodology is intended to contribute to the respective knowledge and to complement the studies that have been carried out to determine stability limits, amplitude and phase propagation, as well as nonlinear iteration convergence, since in most cases these have been incomplete or oversimplified (Abbott 1979; Kinnmark, 1986; Lyn *et al.*, 1987; and Meselhe, 1997).

Knowing in advance the propagation properties of a numerical scheme in order to solve partial differential equations formalizes the way of discretizing and ensures a better result. Thus, by having a criterion based on a perturbation propagation analysis, previous to programming, allows for a better certainty of the limits of its application.

The general results of the examples that were tested are the determination of the convergence limit of the continuous system of Saint-Venant's unidimensional non-conservative partial differential equations, where it was determined that the condition of stability appears when Vedernikov's number is smaller than the unit, $|V_e| \leq 1$. For Saint-Venant's non-conservative version, the



analysis of convergence of the model that results when applying the Leendertse scheme was performed. The results indicate that this scheme has problems for supercritical flow ($F_r > 1$). In addition, based on the numerical tests, it was verified that when having values of Froude's number close to $1 < F_r$, and Courant's number $C_r > 5$, Leendertse scheme presents stability problems.

Besides reviewing the non-conservative version, the conservative version of Saint-Venant's equations was studied in its integral and differential forms. When developing the continuous system, it was determined that the stability range of the unidimensional continuous system is defined by $|V_e| \leq 1$.

With Saint-Venant's system of conservative equations, a discretization based on a "box" scheme or Preissmann scheme was analyzed (Abbott, 1979; Cunge *et al.*, 1980). The result of the convergence analysis has different conditions of stability: $|V_e| \leq 1$, $\psi = 1/2$ and $\theta \geq 1/2$, where ψ and θ are the discretization factors of spatial and temporal weight, respectively. Furthermore, it was determined that for the conditions of flow in which, if the iterative methodology of Picard for the updating of nonlinear terms is applied, problems of numerical convergence for the cases of subcritical and supercritical flow arise. Therefore, the possibility was analyzed of giving a special treatment for the numerical solution of nonlinear terms using Newton-Raphson's method, which gave as a result, both in theoretical form and in the numerical tests, an improvement in the convergence of nonlinear terms for values of $C_r \geq 30$, for subcritical or supercritical flow.

Regarding the simulation of shallow water flow, the analysis of the GWCE was considered (Westerink *et al.*, 1987; Luettich *et al.*, 1991), which was proposed by Lynch and Gray, (1979) to eliminate some problems of spurious oscillations resulting from the discretization in finite element. According to what is stated in the literature, the application of the GWCE is satisfactory, although in certain conditions of simulation, problems of conservation of mass of the GWCE arise.

With the purpose of evaluating this problem, a perturbation propagation analysis of the conservative continuous version of formulation GWCE was made by means of the proposed methodology. It was demonstrated that this formulation is stable for $|V_e| \leq 1$, with the exception that the filtrate term used to eliminate spurious oscillations induces the formulation of the GWCE to present a problem of conservation of mass of a node from one discretization to another for large values of the wave number and relatively small values of the filtrate term (Aldama *et al.*, 1999). In addition, to complement the study of formulation GWCE in its discrete version, a scheme in finite element for the spatial dimension was considered, using Galerkin's method of weighted residuals (Reddy, 1991) and finite differences for the temporal dimension, and after



applying the above-mentioned methodology, it was found, based on phase and amplitude portraits and numerical tests, that this scheme is stable for subcritical flow for values of $C_r < 50$, but that it is unconditionally unstable for supercritical flow



CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN

El uso de modelos para la simulación numérica de flujo en ríos, canales, lagos y bahías es una herramienta bien establecida en la práctica de la ingeniería hidráulica. Así por ejemplo, los modelos unidimensionales basados en las ecuaciones de Saint-Venant y los bidimensionales, fundamentados en las ecuaciones hidrodinámicas para aguas someras, proveen información cuantitativa sobre el comportamiento hidráulico del flujo a superficie libre. Con el análisis de esta información se ha logrado mejorar los criterios de diseño de obras y sistemas de defensa, navegación, pronóstico de inundaciones, detección de llanuras de inundación, rompimiento de presas, diseño de estructuras de regulación y distribución en canales de riego; de control de la contaminación y de sedimentos y erosión.

La necesidad de recurrir al uso de modelos numéricos, se debe a que las ecuaciones que describen el comportamiento del flujo son ecuaciones diferenciales parciales no lineales que no pueden ser resueltas en forma exacta para los casos de interés práctico (sólo se tienen soluciones para casos muy específicos o muy simplificados).

Por esta razón, en las últimas décadas se ha visto incrementado el uso de modelos numéricos para obtener soluciones que permitan determinar con rapidez y precisión el comportamiento de los flujos asociados con los problemas más comunes en la práctica.



Los modelos numéricos resuelven las ecuaciones diferenciales parciales que describen un fenómeno de la naturaleza, y a su vez son soluciones aproximadas que se derivan de la aplicación de varios métodos desarrollados para tal fin, como son los métodos de diferencias finitas y de elemento finito.

La aplicación de estas técnicas y el avance vertiginoso de la tecnología computacional han permitido que los resultados de los modelos de simulación numérica determinen con mayor eficacia un amplio conjunto de procesos hidrodinámicos que se suceden en la naturaleza.

Por otra parte, la calidad de los resultados generados por una simulación numérica está en función directa de la información con que se alimenta el modelo y la capacidad que tiene el sistema discreto para aproximar las ecuaciones diferenciales de partida. El manejo de la información y los datos proporcionados al modelo, no se pueden considerar estrictamente como un problema inherente al simulador numérico, y su calidad depende de tener o no un control adecuado en la recolección de los datos.

En cambio, el problema de conocer la aproximación con que el simulador numérico representa la solución de las ecuaciones de partida, es un problema que aún no está resuelto en su totalidad para el caso de las ecuaciones diferenciales parciales no lineales.

Una forma de evaluar una aproximación numérica es por medio del estudio de sus propiedades de propagación, en donde se incluyen aspectos tales como: estabilidad, errores en amplitud y fase, y convergencia de iteraciones no lineales. En general las herramientas disponibles para el estudio de dichas propiedades son aplicables solamente a problemas lineales con coeficientes constantes. No obstante, los problemas de interés en aplicaciones son frecuentemente no lineales. Entonces, con el fin de tener un conocimiento más amplio de este tipo de problemas, en este trabajo se desarrolla una metodología general para incluir los efectos no lineales dominantes en el análisis de las propiedades de propagación de esquemas numéricos empleados para simular flujos a superficie libre.

1.1. Estado del arte

Durante la construcción de un sistema de ecuaciones discretas, es necesario satisfacer ciertas condiciones para que la solución obtenida se aproxime en forma precisa al sistema de ecuaciones diferenciales parciales de partida. Estas condiciones se asocian con dos problemas diferentes pero que a su vez están interrelacionados. El primero concierne a la convergencia de la solución de las ecuaciones discretas (aproximadas) a la solución de las ecuaciones diferenciales



de partida. El segundo está relacionado con la necesidad de evitar el posible crecimiento de errores de redondeo, producidos por la aritmética de precisión finita con la que operan las computadoras.

El concepto de convergencia ha sido definido por Lapidus y Pinder (1982) como sigue: "El sistema de ecuaciones discretas es convergente, cuando la solución aproximada tiende a la solución exacta de la ecuación diferencial para cada valor de la variable independiente cuando el espaciado de la malla de discretización tiende a cero".

El estudio de la convergencia de esquemas numéricos, particularmente en el ámbito de problemas no lineales, es complicado. Por ello, es conveniente recurrir al Teorema de Equivalencia de Lax (Abbott, 1979; Morton y Mayers, 1994), que se estudiará en detalle en el capítulo 3. En forma esquemática, dicho teorema se puede representar por la siguiente expresión (Fletcher, 1988):

$$\text{CONSISTENCIA} + \text{ESTABILIDAD} = \text{CONVERGENCIA}$$

El teorema de Lax es aplicable sólo a ecuaciones diferenciales parciales lineales, como se demostrará posteriormente en el subcapítulo 3.4. Desafortunadamente, las ecuaciones de flujo y de casi todos los fenómenos que se dan en la naturaleza, ya sean en una o más dimensiones, tienen la particularidad de ser no lineales (Abbott, 1979; Baume y Malaterre, 1992) y, en algunos casos, altamente no lineales (Paniconi y Aldama, 1991; Arroyo, 1994).

Como el Teorema de Equivalencia de Lax no puede aplicarse directamente al caso de ecuaciones no lineales se acostumbra realizar una linealización de las ecuaciones de partida, y dicho teorema se interpreta como una condición necesaria pero no suficiente (Abbott, 1979; Kinnmark, 1986; Fletcher, 1988; Tingsanchali *et al.*, 1989).

Por lo anterior, la parte fundamental de este trabajo se concentra en el estudio de las propiedades de propagación de esquemas numéricos, como un medio para determinar su consistencia, estabilidad y convergencia de ecuaciones discretas en donde se incluyen los términos no lineales.

Por otra parte, se dice que el sistema de ecuaciones discretas es consistente numéricamente, si se cumple la condición siguiente: que al momento que el espaciado de la malla tiende a cero, entonces el sistema de ecuaciones discretas tiende a la ecuación diferencial de partida para cada punto de la propia malla (Fletcher, 1988; Morton y Mayers, 1994).

Una forma de comprobar la consistencia es por medio de un análisis de truncado, que se realiza de esta manera: se sustituye la solución exacta de la ecuación diferencial en las ecuaciones discretas y se aplican expansiones en



serie de Taylor, alrededor de un punto particular de la malla. El resultado de la expansión debe ser la ecuación diferencial original, con un remanente adicional conocido como error de truncado. Para demostrar que el sistema de diferencias es consistente, el error de truncado debe tender a cero a medida que el espaciamiento de la malla tiende a cero.

Por otra parte, es necesario reconocer que los cálculos que permiten obtener soluciones de los sistemas discretos, no pueden realizarse con aritmética de precisión infinita. En efecto, en la práctica cada cálculo se hace con un número finito de decimales, por lo que se tiene un procedimiento que introduce errores de redondeo y, en consecuencia, se obtiene una solución numérica discreta que difiere a la solución exacta de las ecuaciones.

Considerando lo anterior, la estabilidad de un esquema puede estudiarse a través de la evolución de los errores de redondeo inducidos en cualquier etapa del cálculo. Entonces, se dice que un método de solución es estable si durante su aplicación los efectos acumulativos de todos los errores de redondeo son despreciables o están acotados (Abbott, 1979).

El error de redondeo se puede representar como $\xi_j^n = T_j^{*n} - T_j^n$, donde T_j^n , es la solución numérica de precisión infinita del sistema de ecuaciones discretas en el punto de la malla (j, n) y T_j^{*n} , es la solución exacta del sistema de ecuaciones discretas.

Por lo anterior, la condición de estabilidad numérica de un esquema en diferencias finitas o en elemento finito, no depende de las ecuaciones diferenciales originales, y es, por lo tanto, una propiedad de la forma en que se generan las ecuaciones discretas (Morton y Mayers, 1994).

Desde hace mucho tiempo, se han estudiado diversos tipos de inestabilidad numérica para los modelos de simulación de flujos a superficie libre. La estabilidad de dichos modelos ha sido caracterizada a través de la magnitud del número de Courant para flujo sin fricción (Preissmann y Werner, 1961; Shiao-Kung y Leendertse, 1978; Abbott, 1979; Lyn y Goodwin, 1987; Drolet y Gray, 1988; Meselhe y Holly, 1997) y, adicionalmente, a través del número de Vedernikov, que evalúa los efectos que produce el término de fricción (Kinnmark, 1986; Samuels y Skeels, 1990; Aldama y Aguilar, 1996).

Los métodos más difundidos para determinar el crecimiento o decaimiento de errores de redondeo son el Método matricial (Smith, 1985; Morton y Mayers, 1994) y el análisis de series de Fourier (Abbott, 1979; Lapidus y Pinder, 1982; Fletcher, 1988; Abbott y Basco, 1989; Tingsanchali, *et al.*, 1990; Aldama y Paniconi, 1991; García, 1994; Aldama y Aguilar, 1996). El método de Fourier es el más utilizado, y está rigurosamente justificado para problemas puros de





valor inicial con coeficientes constantes y datos iniciales periódicos, lo que fue demostrado por Richtmeyer y Morton en 1967 (Morton y Mayers, 1994). La condición de crecimiento o decaimiento del factor de amplitud se debe analizar con base a la condición general del Teorema de Von Neumann, aunque en la práctica se utiliza una condición de estabilidad práctica (Smith, 1985). Una gran ventaja de los métodos de Fourier es que permiten estudiar las propiedades de propagación de esquemas numéricos asociados con cada modo de Fourier (número de onda) a través de su amplitud y fase, así como compararlas con las propiedades de propagación de la ecuación diferencial que se está aproximando.

El Teorema de Von Neumann define que al expandir los errores de redondeo iniciales en una serie finita de Fourier, la condición de estabilidad se satisface si las componentes de Fourier de la distribución del error decaen para cualquier nivel de tiempo subsecuente (Samuels y Skeels, 1990; Morton y Mayers, 1994).

Como ya se mencionó, los problemas que suceden normalmente en la naturaleza son de coeficientes variables, no lineales, y complicados tipos de condiciones de frontera. En estos casos el método de Fourier puede ser aplicado en forma local, considerando temporalmente congelados los términos no lineales (Abbott, 1979; Aparicio, 1985; García, 1994).

Dado que el método de Fourier es aplicable a problemas lineales con coeficientes congelados para puntos interiores de la malla y que no considera la influencia de las condiciones de frontera, se considera que las condiciones de estabilidad generadas al aplicarlo son necesarias, pero no suficientes (Fletcher, 1988).

En la literatura se encuentran diversas propuestas para usar el método de Fourier en ecuaciones de diferencias con términos no lineales. Así, por ejemplo, se tiene el análisis propuesto por Cunge para flujo unidimensional en canales (Abbott, 1979), en el que se desprecia el término de fricción y el término convectivo es linealizado por medio de congelamiento. Entonces, para el caso de flujo uniforme, se obtiene como resultado que la estabilidad sólo está limitada por el número de Courant (Abbott, 1979; Aparicio, 1985). Un estudio más adecuado en la forma de tratar los términos no lineales lo presentan Samuels y Skeels (1990), quienes toman en cuenta la influencia del término de fricción y concluyen que la estabilidad de la solución está limitada por el número de Vedernikov. Este resultado es totalmente diferente al obtenido por Cunge, lo cual indica la importancia de incluir la influencia de los términos no lineales.

Otro trabajo que presenta el análisis de los términos convectivos y de fricción es el realizado por Tingsanchali *et al.* (1989). En él se indica que para el caso de flujo en dos dimensiones se tiene un término de inestabilidad no lineal, lo cual



influye en la estabilidad general del esquema, aunque no logra determinar en forma específica los límites de estabilidad de todo el esquema en su conjunto, pero sí el comportamiento por medio de la propagación de la fase y la amplitud.

Como se puede observar en la literatura, la influencia de los términos no lineales en las propiedades de propagación de esquemas numéricos ha generado un interés especial por parte de diversos investigadores (Kinnmark, 1986; Lyn y Goodwin, 1987; Tingsanchali *et al.*, 1989; Samuels y Skeels, 1990; Aldama y Aguilar, 1996). Un ejemplo de este tipo de estudios es el problema de convergencia numérica para bajas longitudes de onda en modelos de circulación en dos dimensiones para aguas someras y, específicamente el trabajo sobre la formulación de la GWCE (*Generalized Wave Continuity Equation*) solucionada por medio de elemento finito (Drolet y Gray, 1988), que consiste en la identificación de un problema de estabilidad numérica en las ecuaciones generales de flujo para frecuencias bajas. Dicho problema se abordó proponiendo una modificación en la forma de evaluar la ecuación de conservación de masa (Kinnmark, 1986). Debe destacarse que el trabajo de la GWCE introduce un cambio en la forma de uso de las ecuaciones de flujo para aguas someras, con el fin de eliminar un problema de convergencia cuando se presentan oscilaciones espurias en la formulación de elemento finito de las ecuaciones primitivas.

Analizando los trabajos que se tienen en la literatura, se observa que no se tienen criterios bien establecidos para determinar las propiedades de propagación cuando se tienen términos no lineales. Por lo anterior, en este documento se propone el desarrollo de una metodología basada en el estudio de las propiedades de propagación de los esquemas numéricos que incluyen la influencia dominante de dichos términos, con lo que se pretende contribuir a la mejor comprensión del comportamiento de aquellos esquemas numéricos que aproximan las ecuaciones que rigen el comportamiento de flujos a superficie libre.

1.2. Objetivo y alcance de la investigación

Como ya se indicó, el objetivo del presente es proponer estudio general una metodología general para incluir los efectos no lineales dominantes en el análisis de las propiedades de propagación de esquemas numéricos para simular flujos a superficie libre.

La metodología se aplica al análisis de propagación de perturbaciones en los esquemas de (Preissmann, Leendertse y formulación de la GWCE (*Generalized Wave Continuity Equation*, que en adelante aparece sólo como "formulación GWCE") para las ecuaciones de flujo en una dimensión. En particular, se





determinan las condiciones de estabilidad, los errores de fase, amplitud y las propiedades de convergencia de iteraciones no lineales, para el caso del esquema de Preissmann. Para el esquema de Leendertse y la formulación GWCE, se determinan las propiedades de estabilidad y los errores de amplitud y fase. También se incluyen pruebas numéricas que validan los resultados teóricos.

De esta manera se demuestra que el análisis de propagación de perturbaciones, como se presenta en este trabajo, es una herramienta que permite comprender los efectos no lineales dominantes en el comportamiento de las ecuaciones discretizadas asociadas con la simulación del flujo a superficie libre, y que también permite evaluar las ventajas que se tienen al seleccionar adecuadamente el método para la solución numérica iterativa de las ecuaciones no lineales en diferencias.

Debido a la generalidad del método de propagación de perturbaciones, se incluye en este trabajo un estudio para definir y establecer los criterios de estabilidad de flujos por efecto del surgimiento de fenómenos oscilatorios, como son las ondas rodantes que se presentan en régimen supercrítico (Chow, 1959; Ponce y Simmons, 1977; Ponce y Maisner, 1993). Además, se evalúa la conservación de masa en la formulación generalizada de onda GWCE (Kinnmark y Gray, 1988; Chippada, *et al.*, 1997).

A manera de resumen, la estrategia seguida en este trabajo para estudiar las propiedades de propagación de aproximaciones numéricas a la solución de las ecuaciones de flujo a superficie libre, se contiene en los rubros descritos a continuación:

a) *Análisis de propagación de perturbaciones sobre las variables dependientes continuas.* Para los términos no lineales o con dependencia paramétrica se aplica una expansión de Frechét-Taylor. Además, se realiza un análisis de escalas múltiples y localización. De esta manera, se determina la influencia de cada término en las ecuaciones perturbadas y, consecuentemente, se obtiene un sistema lineal localizado.

b) *Método de Fourier continuo.* Se aplica el método de Fourier para evaluar las propiedades de propagación de las ecuaciones de movimiento localizadas. Se determina la relación de dispersión continua y el límite de estabilidad del sistema continuo, estos incisos se desarrollarán en el capítulo 4, para las ecuaciones de Saint-Venant, y en el subcapítulo 7.1 para la formulación GWCE.

En el caso de los esquemas de Preissmann y Leendertse aplicados a las ecuaciones de Saint-Venant, los siguientes puntos metodológicos se incluyen en forma completa en los capítulos 5 y 6, respectivamente. En el caso del



esquema en el elemento finito para la formulación GWCE, éste se analiza en subcapítulo 7.2.

c) *Discretización numérica.* Se propone una estrategia de discretización del sistema de ecuaciones diferenciales parciales (esquemas en diferencias finitas o de elemento finito), y se verifica que el sistema discreto resultante cumpla con las condiciones para tener un problema bien planteado.

d) *Análisis de consistencia.* Se realiza un análisis de consistencia, sustituyendo la solución exacta de las ecuaciones diferenciales en las ecuaciones discretizadas. Se aplican expansiones en serie de Taylor a las variables dependientes, alrededor de un punto particular de la malla. El resultado debe ser la ecuación diferencial original adicionada de un remanente. Este remanente debe reducirse a cero cuando la malla es refinada *ad infinitum*, lo cual implica que el esquema discreto es consistente. También se determina el orden del error de truncado del esquema numérico.

e) *Análisis de propagación de perturbaciones sobre las variables dependientes discretas.* Para los términos no lineales o con dependencia paramétrica se aplica una expansión de Fréchet-Taylor. Además de esto, se emplea un análisis de escalas múltiples y de localización, para determinar la influencia de cada término en la ecuación perturbada, con lo cual se obtiene el sistema discreto lineal localizado.

f) *Método de Fourier discreto.* Se aplica el método de Fourier para evaluar el comportamiento de la estabilidad del sistema discreto linealizado, y se hace uso de expansiones discretas de Fourier para determinar las condiciones de estabilidad del sistema discreto. La relación de dispersión discreta permite determinar los retratos de amplitud y fase, que caracterizan el esquema en función del número de onda y de las condiciones del flujo.

Se incluye, además, la aplicación de la metodología descrita al análisis de convergencia de iteraciones para la solución de los sistemas de ecuaciones discretas no lineales, ya sea por el método de Picard (Aldama y Paniconi, 1991) o el método de Newton-Raphson (Burden y Faires, 1980; Paniconi *et al.*, 1991).

Para determinar la convergencia numérica sobre la forma iterativa de solución computacional de los términos no lineales, se propone dar un tratamiento al esquema discretizado como se indica en los incisos (e) y (f), con la diferencia de que en este caso se estudia la propagación de errores de una iteración a otra. Para determinar la condición de convergencia, se considera que el factor de amplificación del error debe ser estrictamente menor que uno en valor absoluto (Tingsanchali *et al.*, 1989; Aldama y Paniconi, 1991; Paniconi *et al.*, 1991). Este estudio de convergencia de las iteraciones no lineales se desarrolla



exclusivamente para el esquema de Preissmann, empleando las metodologías de Picard (subcapítulo 5.6) y Newton-Raphson (subcapítulo 5.7).

Por último es necesario puntualizar que el trabajo aquí presentado involucra desarrollos algebraicos en extremo laboriosos, por lo que se recurrió al uso de un manejador simbólico asistido por computadora con el *software* Matlab[®] v.5.0 (MathWorks, 1997), el cual también se utilizó para la graficación de los retratos de amplitud y fase. Además, se utilizaron las librerías ISML[®] (ISML, 1994), generadas sobre una plataforma de FORTRAN[®] 95 (Digital, 1997), para resolver los sistemas de ecuaciones que surgieron en las pruebas numéricas.



CAPÍTULO 2

ECUACIONES DIFERENCIALES DE FLUJO A SUPERFICIE LIBRE

Las ecuaciones diferenciales que gobiernan el flujo a superficie libre se pueden encontrar con relativa facilidad en la literatura (Panton, 1984; Luetlich, *et al.*, 1992). A pesar de ello en el presente capítulo se deducen estas ecuaciones, pues es posible así identificar las simplificaciones que son consideradas en su obtención, que deben ser tomadas en cuenta para los estudios de propagación de perturbaciones.

Es usual deducir las ecuaciones que describen el flujo a superficie libre en el ámbito de un volumen de control infinitesimal (Chow, 1959), y aplicar los principios de conservación de masa y de cantidad de movimiento.

En este trabajo la deducción de las ecuaciones de movimiento parten del principio de continuidad y la segunda Ley de Newton aplicadas a una región material arbitraria en un medio continuo. La arbitrariedad de la región material permite deducir ecuaciones diferenciales a partir de las expresiones integrales de conservación. Dichas ecuaciones diferenciales se integran en la vertical y en la sección transversal con el objeto de obtener las ecuaciones que rigen el flujo a superficie libre en dos dimensiones y en una dimensión respectivamente.



Como resultado de la integración, en la parte final de este capítulo se incluyen las definiciones de las ecuaciones de flujo unidimensional a superficie libre de Saint-Venant en sus versiones integrodiferencial y diferencial, así como en la versión no conservativa. Son estas las definiciones que constituyen la base fundamental de todos los análisis de propagación de perturbaciones en los capítulos 4,5,6 y 7.

2.1. Ecuaciones generales de flujo

Ecuación de continuidad

El principio físico del que proviene la ecuación de continuidad es la ley de conservación de masa, por lo que dicha ecuación es llamada con frecuencia del mismo modo de conservación de masa.

El principio de conservación de masa para una región material, esto es, una región en el espacio que está rodeada por superficie material, que siempre está compuesta de las mismas partículas fluidas, establece que: "La cantidad de materia dentro de una región material es constante". Una definición equivalente es: "La tasa de cambio de masa en el tiempo es cero" (Panton, 1984).

La masa (M) de una región material (RM) se calcula al integrar la densidad ρ sobre la región, como sigue:

$$\frac{dM_{RM}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{RM} \rho dV = 0 \quad (2.1.1)$$

donde dV representa una diferencial de volumen.

Para los efectos de la ecuación (2.1.1) RM es arbitraria, la superficie de frontera de una región material (SM) está en movimiento con la velocidad local del fluido u_i (lámina 2.1), donde u_i es el vector velocidad y el subíndice indica la componente espacial del vector $u_i = \{u_1, u_2, u_3\}$.

Aplicando la regla de Leibnitz se obtiene:

$$\int_{RM} \partial_o \rho dV + \int_{SM} n_i u_i \rho dS = 0 \quad (2.1.2)$$

donde dS representa una diferencial de superficie, n_i el vector unitario y $\partial_o(\cdot) = \partial(\cdot)/\partial t$ derivada parcial temporal.

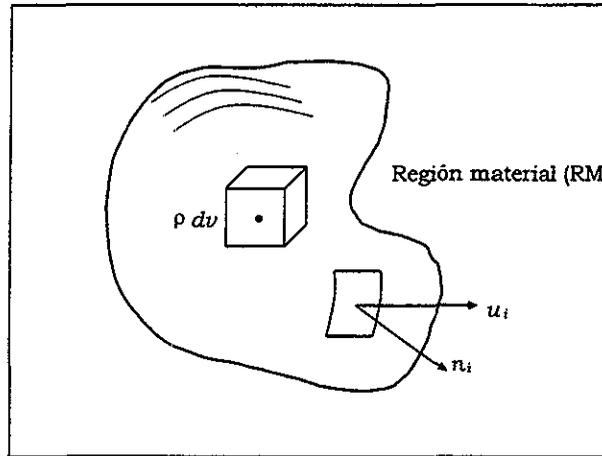


Lámina 2.1. Región material en movimiento.

Haciendo uso del teorema de Gauss para transformar la integral de superficie en una integral de volumen, se llega a:

$$\int_{SM} n_i u_i \rho dS = \int_{RM} \partial_i (\rho u_i) dV \quad (2.1.3)$$

donde $\partial_i(\cdot) = \partial(\cdot)/\partial x_i$ derivada parcial espacial.

Substituyendo la ecuación (2.1.3) en la ecuación (2.1.2) resulta en:

$$\int_{RM} [\partial_o \rho + \partial_i (\rho u_i)] dV = 0 \quad (2.1.4)$$

Recordando que la región de integración es arbitraria, la ecuación (2.1.4) será válida sólo si el integrando es idénticamente igual a cero, de donde se obtiene la forma diferencial de la ecuación de conservación de masa:

$$\partial_o \rho + \partial_i (\rho u_i) = 0 \quad (2.1.5)$$

y, en notación simbólica (vectorial)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (2.1.6)$$

donde $\nabla \cdot (\cdot) = \partial(\cdot)/\partial x + \partial(\cdot)/\partial y + \partial(\cdot)/\partial z$ es el operador divergencia y $\mathbf{u} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k}$ el vector velocidad.

En el caso de tener flujo incompresible ($\partial_o \rho + u_i \partial_i \rho = 0$), la ecuación (2.1.5) se puede escribir como:

$$\partial_i u_i = 0 \quad (2.1.7)$$

Ecuación de cantidad de movimiento

La ecuación de cantidad de movimiento para un medio continuo se obtiene de la segunda ley de Newton. El principio de cantidad de movimiento se puede



expresar como sigue: “La tasa de cambio de la cantidad de movimiento lineal dentro de una región material es igual a la suma de fuerzas que actúan sobre esta región” (Panton, 1984). Es posible identificar dos tipos fuerzas: las de cuerpo, que actúan en el interior de la región material, y las de superficie, que actúan sobre la frontera de la región.

Identificando como F_i las fuerzas de cuerpo por unidad de masa, y como R_i las fuerzas de superficie por unidad de área, las fuerzas resultantes que actúan sobre la región material se pueden expresar como la suma de dos integrales:

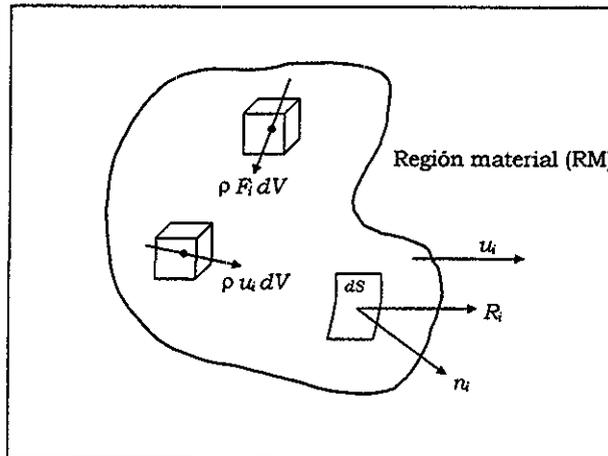
$$[\text{Fuerza resultante sobre la región material}] = \int_{RM} \rho F_i dV + \int_{SM} R_i dS \quad (2.1.8)$$

La cantidad de movimiento en la dirección i asociada con un elemento de volumen es $\rho u_i dV$, por lo que la tasa de cambio en el tiempo de la cantidad de movimiento en la región material resulta:

$$\left[\begin{array}{l} \text{Tasa de cambio de la cantidad de movimiento} \\ \text{en la región material} \end{array} \right] = \frac{d}{dt} \int_{RM} \rho u_i dV \quad (2.1.9)$$

Entonces el principio de cantidad de movimiento se expresa a través de la ecuación siguiente (lámina 2.2):

$$\frac{d}{dt} \int_{RM} \rho u_i dV = \int_{RM} \rho F_i dV + \int_{SM} R_i dS \quad (2.1.10)$$



TESIS CON FALLA DE ORIGEN

Lámina 2.2. Región material para la ecuación de cantidad de movimiento

La parte izquierda de la ecuación (2.1.10) puede ser modificada mediante la aplicación de la regla de Leibnitz:

$$\frac{d}{dt} \int_{RM} \rho u_i dV = \int_{RM} \partial_o(\rho u_i) dV + \int_{SM} n_j u_i u_j \rho dS \quad (2.1.11)$$



Aplicando el teorema de Gauss a la ecuación anterior, se tiene que:

$$\frac{d}{dt} \int_{RM} \rho u_i dV = \int_{RM} \partial_o(\rho u_i) dV + \int_{RM} \partial_j(\rho u_i u_j) dV \quad (2.1.12)$$

Entonces, la ecuación (2.1.10) se puede escribir como:

$$\int_{RM} [\partial_o(\rho u_i) + \partial_j(\rho u_i u_j)] dV = \int_{RM} \rho F_i dV + \int_{SM} R_i dS \quad (2.1.13)$$

Fuerzas de superficie

Cuando se construye una superficie cerrada imaginaria, se produce una división del fluido en dos porciones, una interna y una externa, y la acción directa del fluido en la parte exterior tiene una influencia hacia la parte interna y se analiza por medio del concepto de fuerzas de superficie.

En esencia, es imaginable que la parte exterior del fluido se ha reemplazado por una serie de fuerzas que producen una acción directa en la parte interior del fluido. Estas son las fuerzas de superficie que realmente integran los efectos de fuerzas que actúan a un nivel microscópico.

La fuerza de superficie por unidad de área del tiempo t se puede considerar como una función de posición del punto x_i en el espacio y de la orientación que la superficie material tiene en x_i , caracterizada por el vector normal unitario n_i que sale de esta superficie. Por lo tanto, $R_i = R_i(n_i; x_i)$. Introduciendo ahora el concepto de tensor de esfuerzos T_{ij} (Panton, 1984):

$$R_i = n_i T_{ij} \quad (2.1.14)$$

en donde el tensor de esfuerzos depende de la posición x_i , pero no de la orientación del plano que pasa por ese punto.

Para obtener la ecuación diferencial de cantidad de movimiento se sustituye la ecuación de esfuerzos de superficie (2.1.14) en (2.1.13), y aplicando el teorema de Gauss para las fuerzas de superficie, se tiene:

$$\int_{RM} [\partial_o(\rho u_i) + \partial_j(\rho u_i u_j)] dV = \int_{RM} (\rho F_i + \partial_j T_{ji}) dV \quad (2.1.15)$$

Debido a que la región de integración es arbitraria idénticamente a cero en la ecuación (2.1.15) la forma diferencial de la ecuación de cantidad de movimiento resulta ser:



$$\partial_o(\rho u_i) + \partial_j(\rho u_i u_j) = \rho F_i + \partial_i T_{ji} \quad (2.1.16)$$

La relación constitutiva para fluidos newtonianos (Panton, 1984) establece que:

$$T_{ji} = (-p + \lambda \partial_k u_k) \delta_{ij} + \mu (\partial_i u_j + \partial_j u_i) \quad (2.1.17)$$

donde p representa la presión; μ el primer coeficiente de viscosidad o viscosidad dinámica; λ el segundo coeficiente de viscosidad; y δ_{ij} el delta de Kroneker. Sustituyendo la relación anterior en la ecuación (2.1.16), se obtiene:

$$\partial_o(\rho u_i) + \partial_j(\rho u_i u_j) = \rho F_i - \partial_i p + \partial_i (\lambda \partial_k u_k) + \partial_i [\mu (\partial_i u_j + \partial_j u_i)] \quad (2.1.18)$$

El sistema de ecuaciones de conservación de masa (2.1.6) y de cantidad de movimiento (2.1.18) es también conocido como las ecuaciones de Navier-Stokes. Para el caso de flujo incompresible ($\rho = cte.$) de viscosidad constante, dichas ecuaciones adoptan la forma:

$$\partial_i u_i = 0 \quad (2.1.19)$$

$$\rho \partial_o u_i + \rho \partial_j (u_i u_j) = \rho g_i - \partial_i p + \mu \partial_j \partial_j u_i \quad (2.1.20)$$

donde g_i es la aceleración de la gravedad.

Descomposición de Reynolds

A pesar de que las ecuaciones (2.1.19) y (2.1.20) son válidas tanto para flujo laminar como para flujo turbulento, es posible demostrar que los requerimientos de resolución espacial y temporal son prohibitivamente grandes para flujos con números de Reynolds altos (Strikwerda, 1989). Por lo anterior, en aplicaciones ingenieriles y geofísicas es común emplear la descomposición propuesta por Reynolds (Panton, 1984), que consiste en expresar las variables instantáneas de flujo como la suma de un promedio de ensamble (determinista) y una fluctuación turbulenta (aleatoria). En el caso de la velocidad y la presión, dicha descomposición adopta la forma:

$$u_i = \bar{u}_i + u'_i \quad (2.1.21)$$

$$p = \bar{p} + p' \quad (2.1.22)$$

En las ecuaciones anteriores las variables con tilde (barra) se refieren a los promedios de ensamble y las minúsculas con prima a las fluctuaciones turbulentas. Los promedios de ensamble de velocidad y presión se definen como sigue:

$$\bar{u}_i = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N u_i^{(n)} \quad (2.1.23)$$



$$\bar{p} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N p^{(n)} \quad (2.1.24)$$

donde la barra denota el promedio de ensamble y el superíndice (n) el número de realización. Evidentemente, $\bar{u}'_i = 0$ y $\bar{p}' = 0$, lo cual se cumple por definición.

Sustituyendo (2.1.21) y (2.1.22) en (2.1.19) y dado que las derivadas espaciales y temporales conmutan con la operación de promediado en la ecuación (2.1.19), se obtiene la ecuación de continuidad para la velocidad promediada:

$$\partial_i \bar{u}_i = 0 \quad (2.1.25)$$

Aplicando la misma metodología, para el caso de la ecuación de cantidad de movimiento se obtiene:

$$\rho \partial_o \bar{u}_i + \rho \partial_j (\bar{u}_i \bar{u}_j) = -\partial_i \bar{p} + g_i + \mu \partial_j \partial_j \bar{u}_i - \rho \partial_j \left(\overline{u'_i u'_i} \right) \quad (2.1.26)$$

donde el término $-\rho \overline{u'_i u'_i}$, conocido como tensor de esfuerzos de Reynolds, representa la influencia de la turbulencia en la dinámica de la velocidad media \bar{u}_i . Las ecuaciones (2.1.25) y (2.1.26), que gobiernan la dinámica promediada del flujo, se conocen como ecuaciones de Reynolds.

Cuando las ecuaciones de Navier-Stokes se promedian en el tiempo, se pierde información acerca de los detalles del flujo. Adicionalmente, dado que el efecto de la turbulencia se ha introducido a través de los esfuerzos de Reynolds, se tienen nuevas variables dependientes dentro del sistema y, como no se ha aumentado el número de ecuaciones, se tiene un problema indeterminado, el cual se conoce como "problema de cerradura". Entonces, deben introducirse ciertas hipótesis fenomenológicas para cerrar el problema (Tsanis, 1989).

Varias hipótesis clásicas de cerradura, para expresar los esfuerzos turbulentos en términos de la velocidad media, han sido aplicadas a la ecuación (2.1.26). Aquí se empleará el modelo de viscosidad turbulenta propuesto por Boussinesq (Abbott *et al.*, 1989; Tsanis, 1989):

$$\rho \left(\overline{u'_i u'_i} \right) = -\frac{2}{3} \rho k \delta_{ij} + \mu_t \partial_j \partial_j \bar{u}_i \quad (2.1.27)$$

donde μ_t es la viscosidad turbulenta y $k \equiv \overline{u'_i u'_i}$ la energía cinética turbulenta por unidad de masa. Debe hacerse notar que μ_t es una propiedad del flujo y no del fluido. Existe una gran diversidad de modelos empíricos y semiempíricos para determinar μ_t . Una buena revisión de los mismos se puede consultar en Tsanis (1989).



Esta propuesta de solución del problema de la cerradura no es la más completa, pero es ampliamente utilizada. Al sustituir la ecuación (2.1.27) en la ecuación (2.1.26) se obtiene:

$$\rho \partial_o \bar{u}_i + \rho \partial_j (\bar{u}_j \bar{u}_i) = -\partial_i \bar{p} + g_i + \partial_j [(\mu + \mu_t) \partial_j \bar{u}_i] \quad (2.1.28)$$

donde $\bar{p} = \bar{p} + \frac{2}{3} \rho k$ es la presión promedio modificada por los efectos de turbulencia.

2.2. Ecuaciones integradas en la vertical

En la práctica de la ingeniería es necesario dar una respuesta a problemas del movimiento del flujo en canales y tuberías en forma rápida, y el utilizar los modelos que involucren la modelación de los esfuerzos de Reynolds complica en gran medida el logro de este objetivo.

De tal manera es común que las leyes de la dinámica de fluidos se formulen con base en las llamadas derivaciones ingenieriles, que utilizan el volumen de control como unidad de análisis (Abbott, 1979). Tales derivaciones están basadas en simplificaciones cuya validez se supone a priori (Abbott y Basco, 1989).

No obstante, las derivaciones ingenieriles impiden que se identifiquen con precisión los casos en los que son válidas para las antes citadas hipótesis simplificadoras. Por esto, es conveniente considerar la derivación de las ecuaciones diferenciales que se emplean en la práctica ingenieril a partir de la integración espacial de las ecuaciones de Reynolds.

A continuación se presenta la derivación de las ecuaciones que rigen el flujo unidimensional a superficie libre en un canal infinitamente ancho, a partir de la integración vertical de las ecuaciones de Reynolds. Posteriormente se tratará el caso de flujo en canales con sección transversal arbitraria.

Supóngase que el eje x coincide con la dirección horizontal principal del flujo, que el eje y coincide con la dirección vertical y que el eje z es próximo a la dirección horizontal, formando con el eje x un pequeño ángulo θ . Se define así, de modo que $\sin(\theta)$ coincide con la pendiente media del fondo del canal. Indicando con \bar{u} la velocidad en la dirección x , con \bar{v} la velocidad en la dirección y , con \bar{w} la velocidad en la dirección z , y suponiendo que $\bar{w} = 0$, que las variaciones en el sentido z se anulan y que $\rho = \text{const.}$, las ecuaciones de Reynolds (2.1.25) y (2.1.28) adoptan la forma



$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0 \quad (2.2.1)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}^2}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}\bar{v}}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \quad (2.2.2)$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{v}\bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}^2}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} - g + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} \quad (2.2.3)$$

$$0 = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} \quad (2.2.4)$$

donde

$$\bar{\tau}_{xx} = \mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - \rho \overline{u'^2} \quad (2.2.5)$$

$$\tau_{xy} = \mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \rho \overline{u'v'} \quad (2.2.6)$$

$$\tau_{yx} = \mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - \rho \overline{v'u'} \quad (2.2.7)$$

$$\tau_{zz} = \mu \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} - \rho \overline{v'^2} \quad (2.2.8)$$

$$\tau_{zx} = \mu \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} - \rho \overline{w'u'} \quad (2.2.9)$$

Las expresiones (2.2.5)-(2.2.9) representan los esfuerzos efectivos que actúan en el flujo. La ecuación (2.2.4) no proporciona información útil para el análisis que a continuación se presenta. Por otra parte, una simplificación de la ecuación (2.2.3) permite a su vez simplificar la versión verticalmente integrada de la ecuación de cantidad de movimiento en el sentido horizontal del flujo (2.2.2). En efecto, suponiendo que los términos inerciales y los que involucran a los esfuerzos efectivos en la ecuación (2.2.4) son despreciables en comparación con el término gravitacional, se obtiene la siguiente ecuación aproximada de cantidad de movimiento en la dirección vertical:

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial y} = -\rho g \quad (2.2.10)$$

Integrando esta expresión entre una cota arbitraria y , y la elevación de la superficie libre $y = \eta(x, t)$ (lámina 2.3) se obtiene:



$$\bar{p} = p_a - \rho g(\eta - y) \quad (2.2.11)$$

donde p_a representa la presión atmosférica. Conforme a (2.2.11), la presión está distribuida hidrostáticamente en la vertical. El desprecio de los términos inerciales en la ecuación (2.2.3) se justifica cuando las líneas de corriente no exhiben curvaturas pronunciadas en la vertical y, por lo tanto, las aceleraciones en esa dirección son despreciables.

Sustituyendo la ecuación (2.2.11) en la ecuación (2.2.2) se obtiene la aproximación hidrostática de la ecuación de cantidad de movimiento horizontal:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}^2}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}\bar{v}}{\partial y} = g \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \quad (2.2.12)$$

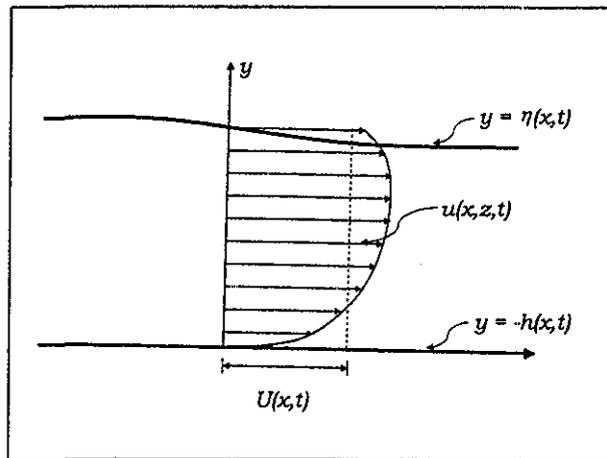


Lámina 2.3. Variación de la velocidad en el vertical.

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

Integrando la ecuación de conservación de masa (2.2.1) y la ecuación de cantidad de movimiento (2.2.12) en la vertical, se tiene:

$$\int_{-h(x,t)}^{\eta(x,t)} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} dy + \int_{-h(x,t)}^{\eta(x,t)} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} dy = 0 \quad (2.2.13)$$

$$\int_{-h(x,t)}^{\eta(x,t)} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} dy + \int_{-h(x,t)}^{\eta(x,t)} \frac{\partial (\bar{u}^2)}{\partial x} dy + \int_{-h(x,t)}^{\eta(x,t)} \frac{\partial (\bar{u}\bar{v})}{\partial y} dy = -\frac{1}{\rho} \int_{-h(x,t)}^{\eta(x,t)} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} dy + \frac{1}{\rho} \int_{-h(x,t)}^{\eta(x,t)} \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} dy + \frac{1}{\rho} \int_{-h(x,t)}^{\eta(x,t)} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy \quad (2.2.14)$$

Aplicando la regla de Leibnitz para intercambiar el orden de la integración y diferenciación las ecuaciones (2.2.13) y (2.2.14):



$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{-h(x,t)}^{\eta(x,t)} \bar{u} dy - \bar{u}|_{y=\eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} - \bar{u}|_{y=-h} \frac{\partial h}{\partial y} + \bar{v}|_{y=\eta} - \bar{v}|_{y=-h} = 0 \quad (2.2.15)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-h(x,t)}^{\eta(x,t)} \bar{u} dy - \bar{u}|_{y=\eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} - \bar{u}|_{y=-h} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h(x,t)}^{\eta(x,t)} \bar{u}^2 dy - \bar{u}^2|_{y=\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} - \bar{u}^2|_{y=-h} \frac{\partial h}{\partial x} \\ + (\bar{u}\bar{v})_{y=\eta} - (\bar{u}\bar{v})_{y=-h} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h(x,t)}^{\eta(x,t)} \bar{p} dy + \frac{\bar{p}}{\rho}|_{y=\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\bar{p}}{\rho}|_{y=-h} \frac{\partial h}{\partial x} \end{aligned} \quad (2.2.16)$$

$$\begin{aligned} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h(x,t)}^{\eta(x,t)} \tau_{xx} dy - \tau_{xx}|_{y=\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} - \tau_{xx}|_{y=-h} \frac{\partial h}{\partial x} \\ + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h(x,t)}^{\eta(x,t)} \tau_{xy} dy - \tau_{xy}|_{y=\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} - \tau_{xy}|_{y=-h} \frac{\partial h}{\partial x} \end{aligned}$$

Entonces, para evaluar la influencia de la superficie libre y el fondo, se propone definir una condición de frontera cinemática en la integración en la vertical de forma que (Luettich *et al.*, 1992)

$$\frac{D}{Dt} (\eta - y) \Big|_{y=\eta} = \left[\frac{\partial \eta}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \eta}{\partial x} - \bar{v} \right]_{y=\eta} = 0 \quad (2.2.17)$$

Para el fondo se toma que $y = -h(x)$, la cual asume que la condición cinemática es variable espacialmente e impermeable:

$$\frac{D}{Dt} (y + h) \Big|_{y=-h} = \left[\bar{u} \frac{\partial h}{\partial x} + \bar{v} \right]_{y=-h} = 0 \quad (2.2.18)$$

Para las fronteras laterales que se supone en la vertical del flujo, deben ser continuas, y esto implica que los vectores normales en la vertical son nulos. El equilibrio dinámico se debe satisfacer en la fronteras y proyectar las fuerzas de superficie del elemento en la dirección x, z

$$\tau_x^s = \left[-\tau_{xx} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \tau_{xy} \right]_{y=\eta} \quad (2.2.19)$$

y para el fondo

$$\tau_x^b = \left[\tau_{xx} \frac{\partial h}{\partial x} + \tau_{yx} \right]_{y=-h} \quad (2.2.20)$$

Como en las fronteras laterales son requeridos nuevamente los esfuerzos cortantes de continuidad entonces se tiene que el [esfuerzo cortante normal]=0 y el [esfuerzo cortante tangencial]=0.



Aplicando las condiciones de frontera cinemática en la superficie, y el fondo (2.2.17)-(2.2.20) en las ecuaciones (2.2.15) y (2.2.16), se tiene que:

$$\frac{\partial d}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h(x,t)}^{\eta(x,t)} \bar{u} dy = 0 \quad (2.2.21)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{-h(x,t)}^{\eta(x,t)} \bar{u} dy + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h(x,t)}^{\eta(x,t)} \bar{u} \bar{u} dy = \int_{-h(x,t)}^{\eta(x,t)} F dy - \frac{1}{\rho} \int_{-h(x,t)}^{\eta(x,t)} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} dy + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h(x,t)}^{\eta(x,t)} \tau_{xx} dy + \frac{1}{\rho} (\tau_x^s - \tau_x^b) \quad (2.2.22)$$

donde $d = y + h$ es el tirante; F agrupa los esfuerzos efectivos en la vertical. Considerado que la velocidad promediada de la velocidad en la vertical U (ver lámina 2.3) se puede evaluar como

$$U = \frac{1}{d} \int_{-h(x,t)}^{\eta(x,t)} \bar{u} dy \quad (2.2.23)$$

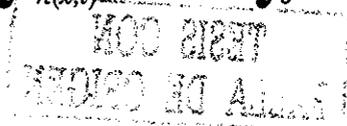
El sistema de ecuaciones integradas en la vertical (2.2.21) y (2.2.22) es válido para cualquier tipo de flujo unidimensional y puede ser utilizado para describir el comportamiento de un escurrimiento en canales naturales o artificiales. En el siguiente subcapítulo se desarrollarán algunas consideraciones con el fin de tener una aplicabilidad más simplificada, sin perder la generalidad de las leyes físicas que las generan, pues ayudan a resolver algunos problemas que se presentan en la práctica de la ingeniería

2.3. Ecuaciones de flujo a superficie libre

El sistema de ecuaciones (2.2.22) y (2.2.23) evalúa la conservación de masa y cantidad de movimiento en el sentido unidimensional, para un cauce de ancho unitario. En caso de tenerse un cauce natural con ancho de la superficie libre B específico, es necesario considerar un ancho diferencial de espesor $d\xi$ en lugar de un ancho unitario (lámina 2.4), y después integrar las ecuaciones (2.2.22) y (2.2.23) a todo lo ancho de la sección como se muestra en seguida:

$$\int_0^{B(\xi)} \frac{\partial d}{\partial t} d\xi + \int_0^{B(\xi)} \left(\frac{\partial}{\partial x} \int_{-h(x,t)}^{\eta(x,t)} \bar{u} dy \right) d\xi = 0 \quad (2.3.1)$$

$$\int_0^{B(\xi)} \left(\frac{\partial}{\partial t} \int_{-h(x,t)}^{\eta(x,t)} \bar{u} dy \right) d\xi + \int_0^{B(\xi)} \left(\frac{\partial}{\partial x} \int_{-h(x,t)}^{\eta(x,t)} \bar{u} \bar{u} dy \right) d\xi = \int_0^{B(\xi)} \int_{-h(x,t)}^{\eta(x,t)} F dy d\xi - \frac{1}{\rho} \int_0^{B(\xi)} \int_{-h(x,t)}^{\eta(x,t)} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} dy d\xi + \int_0^{B(\xi)} F_{xx} d\xi + \frac{1}{\rho} \int_0^{B(\xi)} (\tau_x^s - \tau_x^b) d\xi \quad (2.3.2)$$



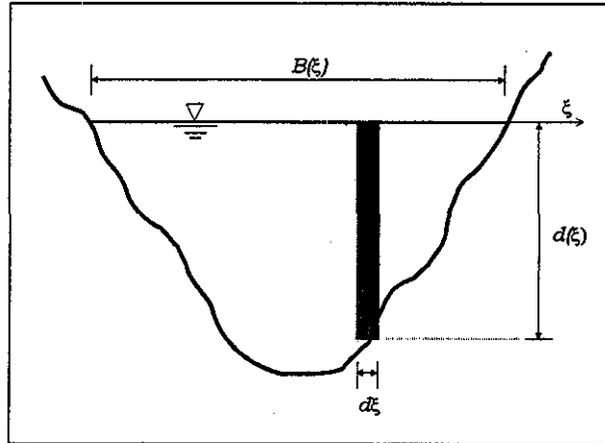


Lámina 2.4. Espacio de integración de la sección transversal de un cauce.

donde el término F_{xx} engloba la variación de los esfuerzos en la masa del flujo, y donde este término tiene la capacidad de evaluar los efectos de turbulencia en la vertical (Abbott, 1979) y se puede considerar como:

$$\frac{1}{\rho} F_{xx} = \frac{1}{d} \int_{-h(x,t)}^{\eta(x,t)} \tau_{xx} dy \quad (2.3.3)$$

Aplicando nuevamente la regla de Leibnitz para cambiar el orden de la integración y diferenciación de las ecuaciones (2.3.1) y (2.3.2), y desarrollando se tiene:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^{B(\xi)} d d\xi + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{B(\xi)} \int_{-h(x,t)}^{\eta(x,t)} \bar{u} dy d\xi = 0 \quad (2.3.4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{B(\xi)} \int_{-h(x,t)}^{\eta(x,t)} \bar{u} dy d\xi + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{B(\xi)} \int_{-h(x,t)}^{\eta(x,t)} \bar{u} \bar{u} dy d\xi &= \int_0^{B(\xi)} \int_{-h(x,t)}^{\eta(x,t)} F dy d\xi - \\ - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{B(\xi)} \int_{-h(x,t)}^{\eta(x,t)} \bar{p} dy d\xi + \frac{1}{\rho} \int_0^{\Gamma(\xi)} \bar{p} \frac{\partial r}{\partial x} d\Gamma + \int_0^{B(\xi)} F_{xx} d\xi + \frac{1}{\rho} \int_0^{B(\xi)} (\tau_x^s - \tau_x^b) d\xi \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

donde r es el desplazamiento de la frontera en una sección transversal dada con respecto a la variable espacial o temporal, a lo largo de la dirección normal N de la frontera Γ , proyectada sobre un plano paralelo a la sección transversal, N_i es el coseno director de la normal N de Γ y se considerará que apunta hacia afuera de la sección transversal (Yen, 1974).

Se evalúan las integrales que contienen los términos de las características geométricas y de variación de la velocidad promediada de la forma siguiente:

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN



$$A(x, t) = \int_0^{B(\xi; x, t)} d(x, t) d\xi \quad (2.3.6)$$

$$Q(x, t) = U(x, t)A(x, t) = \int_0^{B(\xi; x, t)} \int_{-h(x, t)}^{\eta(x, t)} \bar{u}(x, y, t) dy d\xi \quad (2.3.7)$$

$$\frac{Q(x, t)^2}{A(x, t)} = U(x, t)^2 A(x, t) = \int_0^{B(\xi; x, t)} \int_{-h(x, t)}^{\eta(x, t)} \bar{u}(x, y, t)^2 dy d\xi \quad (2.3.8)$$

donde $Q(x, t)$ es el gasto o la tasa de flujo por unidad de volumen que circula por una sección transversal.

Sustituyendo las integrales (2.3.6)-(2.3.8) en (2.3.4) y (2.3.5)

$$\frac{\partial A(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial Q(x, t)}{\partial x} = 0 \quad (2.3.9)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{Q(x, t)^2}{A(x, t)} \right] &= \int_0^{B(\xi)} \int_{-h(x, t)}^{\eta(x, t)} F dy d\xi - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{B(\xi)} \int_{-h(x, t)}^{\eta(x, t)} \bar{p} dy d\xi + \\ \frac{1}{\rho} \int_0^{\Gamma(\xi)} \bar{p} \frac{\partial r}{\partial x} d\Gamma + \int_0^{B(\xi)} F_{xx} d\xi + \frac{1}{\rho} \int_0^{B(\xi)} (\tau_x^s - \tau_x^b) d\xi \end{aligned} \quad (2.3.10)$$

Debido a que se tiene un campo gravitatorio, las fuerzas de cuerpo se pueden evaluar por medio de un potencial, de manera que

$$F = -g \frac{\partial}{\partial x} (z_b + d) = gS_b - \frac{\partial d}{\partial x} \quad (2.3.11)$$

donde g es la aceleración de la gravedad; z_b la elevación del fondo de la plantilla del canal; $S_b = -\partial z_b / \partial x$ pendiente de fondo del canal y la presión local P en relación al fondo del canal, se puede evaluar como

$$P = \bar{p} + \rho g d \quad (2.3.12)$$

Sustituyendo (2.3.11) y (2.3.12) en (2.3.10) y desarrollando se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{Q(x, t)^2}{A(x, t)} \right] &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{B(\xi)} \int_{-h(x, t)}^{\eta(x, t)} P dy d\xi + \\ \frac{1}{\rho} \int_0^{\Gamma(\xi)} P \frac{\partial r}{\partial x} d\Gamma + g A(x, t) S_b + \int_0^{B(\xi)} F_{xx} d\xi + \frac{1}{\rho} \int_0^{B(\xi)} (\tau_x^s - \tau_x^b) d\xi \end{aligned} \quad (2.3.13)$$

Considerando que el esfuerzo cortante en la superficie es motivado principalmente por el efecto del viento, el cual se puede considerar nulo $\tau_s \approx 0$, debido a que este efecto no influye de forma importante en el flujo a largo de un canal o río. El esfuerzo cortante en el fondo que es producto de los efectos de



fricción y se puede parametrizar por medio de la ecuación de Chezy (French, 1985), de forma que

$$\frac{1}{\rho} \int_0^{B(\xi)} \tau_x^b d\xi = C_f \frac{|Q(x,t)|Q(x,t)}{RA(x,t)} \quad (2.3.14)$$

donde C_f es el coeficiente de fricción de Chezy; $R(A; x, t) = A(x, t)/P(A; x, t)$ el radio hidráulica y $P(A; x, t)$ el perímetro mojado.

Para los casos de aplicación de la ecuación (2.3.13) en la ingeniería, el flujo en un canal es del tipo turbulento completamente desarrollado. Entonces el término que involucra los efectos turbulentos en el medio se puede englobar en el coeficiente de fricción de la forma de (Abbott, 1979):

$$\int_0^{B(\xi)} F_{xx} d\xi = C_f(A, Q, F_{xx}) \quad (2.3.15)$$

Así, sustituyendo las ecuaciones (2.3.14) y (2.3.15) en (2.3.13):

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{Q(x,t)^2}{A(x,t)} \right] + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{B(\xi)} \int_{-h(x,t)}^{\eta(x,t)} P dy d\xi + \\ \frac{1}{\rho} \int_0^{\Gamma(\xi)} P \frac{\partial r}{\partial x} d\Gamma - g A(x,t) S_b + g A(x,t) S_f(A, Q; x, t) = 0 \end{aligned} \quad (2.3.16)$$

donde

$$S_f(A, Q; x, t) = C_f \frac{|Q(x,t)|Q(x,t)}{g R(A; x, t) A(x, t)^2} \quad (2.3.17)$$

Para evaluar los efectos de la presión en un tramo de un canal, se propone analizar un diagrama de cuerpo libre para el caso de tener una reducción (o ampliación) de una conducción, para un flujo dado, como se muestra en la lámina 2.5.

Considerando que el vector normal de la variación del ancho sea paralelo a las paredes del canal de forma que $N = \cos\theta \approx 1$, lo cual difiere de lo considerado anteriormente cuando se tenía una ampliación radial r , y además, en el caso de contar con una pendiente no muy brusca de la plantilla del fondo del canal, los efectos de la presión se evalúan por medio de las siguientes integrales (Cunge et al., 1980)

$$I_1(A; x, t) \equiv \int_0^{y(A; x, t)} [y(A; x, t) - \eta] \delta(x, \eta) d\eta = \gamma \int_0^{B(\xi)} \int_{-h(x,t)}^{\eta(x,t)} P dy d\xi \quad (2.3.18)$$

$$I_2(A; x, t) \equiv \int_0^{y(A; x, t)} [y(A; x, t) - \eta] \left[\frac{\partial \delta}{\partial x} \right]_{y=y_0} d\eta \approx \gamma \int_0^{\Gamma(\xi)} P \frac{\partial r}{\partial x} d\Gamma \quad (2.3.19)$$

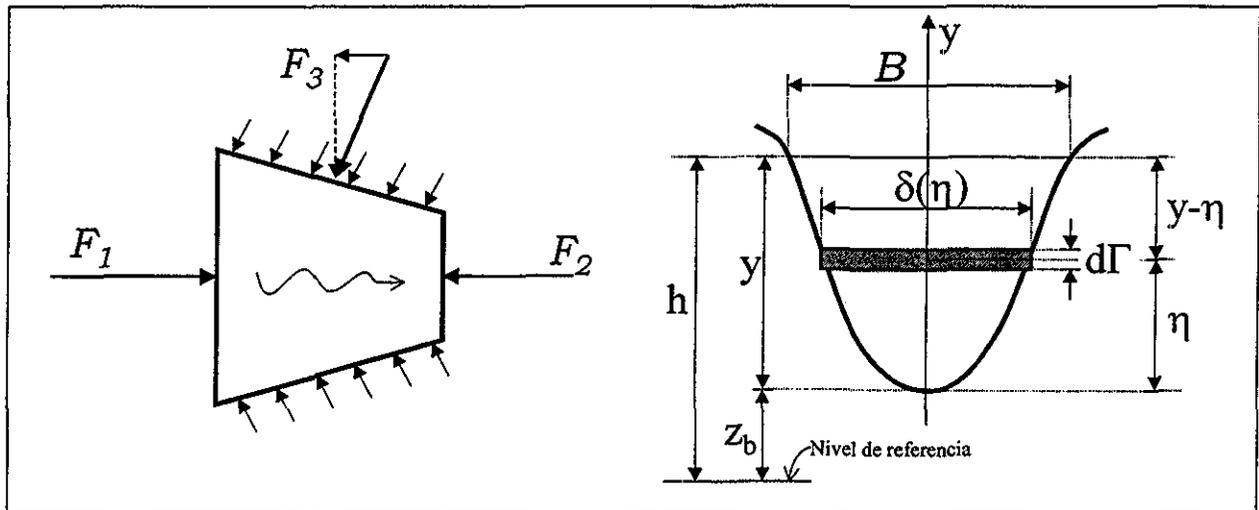


Lámina 2.5. Diagrama de cuerpo libre y características de la sección transversal de un canal.

Sustituyendo las integrales (2.3.18) y (2.3.19) en (2.3.16), y con la ecuación de conservación de masa (2.3.9), se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones integradas en la vertical, para describir el comportamiento del flujo en las conducciones a superficie libre:

$$\mathcal{L}(A, Q; x, t) = \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (2.3.20)$$

$$\mathcal{M}(A, Q; x, t) = \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{A} \right) + g \frac{\partial I_1(A; x, t)}{\partial x} + g I_2(A; x, t) + g A [S_f(A, Q; x, t) - S_b] = 0 \quad (2.3.21)$$

El sistema de ecuaciones (2.3.20) y (2.3.21) es conocido como las *ecuaciones de Saint-Venant en su versión conservativa integrodiferencial* (Cunge et al., 1980) y son ampliamente utilizadas en la práctica en la simulación de flujo a superficie libre en canales naturales y artificiales, incluyendo el caso de tener ampliaciones o reducciones bruscas.

Si se cuenta con una conducción con ampliaciones o reducciones suaves sin variaciones bruscas del fondo del canal, la función \$\delta(x, \eta)\$ es univaluada. Entonces, en las integrales \$I_1(A; x, t)\$ y \$I_2(A; x, t)\$ se puede aplicar la regla de Leibnitz para intercambiar el orden de la integración y diferenciación. De ese modo, teniendo en cuenta que \$\delta(x, y) \equiv B(A; x, t)\$, donde \$B(A; x, t)\$ es el ancho de la superficie libre del agua y \$A(x, t) = \int_0^{y(A; x, t)} \delta(x, \eta) d\eta\$, el área de la sección transversal del cauce, entonces

TESIS CON FALLA DE ORIGEN



$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial x} [g I_1(A; x, t)] &= g \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{y(A; x, t)} [y(A; x, t) - \eta] \delta(x, \eta) d\eta \\
 &= g \frac{\partial y(A; x, t)}{\partial x} \int_0^{y(A; x, t)} \delta(x, \eta) d\eta + g \int_0^{y(A; x, t)} [y(A; x, t) - \eta] \left[\frac{\partial \delta(x, \eta)}{\partial x} \right]_{y=y_0} d\eta \\
 &= g A(x, t) \frac{\partial y(A; x, t)}{\partial x} + g I_2(A; x, t)
 \end{aligned} \tag{2.3.22}$$

Con el resultado anterior, los términos que involucran los efectos de presión y de variación de la plantilla del canal se pueden evaluar de la forma siguiente:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial x} [g I_1(A; x, t)] - g I_2(A; x, t) - g A(x, t) S_b &= g A(x, t) \frac{\partial y(A; x, t)}{\partial x} + g I_2(A; x, t) - \\
 &\quad g I_2(A; x, t) + g A(x, t) \frac{\partial z_b(x)}{\partial x} \\
 &= g A(x, t) \frac{\partial [y(A; x, t) + z_b(x)]}{\partial x} \\
 &= g A(x, t) \frac{\partial h(A; x, t)}{\partial x}
 \end{aligned} \tag{2.3.23}$$

donde $h(A; x, t) = y(A; x, t) + z_b(x)$ es el nivel de la superficie libre del agua, medido desde un nivel de referencia arbitrario.

Sustituyendo la ecuación (2.3.23) en la ecuación de cantidad de movimiento (2.3.21), y junto con la ecuación de conservación de masa (2.3.20), se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones de Saint-Venant conservativas en su versión diferencial

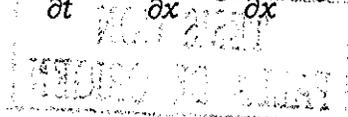
$$\frac{\partial A(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial Q(x, t)}{\partial x} = 0 \tag{2.3.24}$$

$$\frac{\partial Q(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{Q(x, t)^2}{A(x, t)} \right] + g A(x, t) \frac{\partial h(A; x, t)}{\partial x} + g A(x, t) S_f(A, Q; x, t) = 0 \tag{2.3.25}$$

Finalmente, una forma de aplicar las ecuaciones de Saint-Venant en el caso de ríos muy anchos y con poco tirante, en donde se considera una sección transversal casi rectangular $A = BH$, donde B es el ancho de la sección y H el tirante en la sección. Haciendo uso de esta relación, y aplicándola en las ecuaciones (2.3.24) y (2.3.25), se obtiene el sistema de ecuaciones de Saint-Venant no conservativas (Cunge et al., 1980; García, 1994)

$$B(H; x, t) \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [U A(H; x, t)] = 0 \tag{2.3.26}$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + g \frac{\partial H}{\partial x} + g \frac{\partial z_b(x)}{\partial x} + g S_f(H, U; x, t) = 0 \tag{2.3.27}$$





Por otra parte, una forma de evaluar el término de fricción definida en la ecuación de cantidad de movimiento (2.3.16), presenta una deficiencia en la homogeneidad de escalas. Con el fin de manejar una ecuación dimensionalmente homogénea del término de fricción, y haciendo uso de la evaluación del término de fricción de Chezy (2.3.14), se tiene:

$$S_f = \frac{K|U|^{N-1}U}{R^M} \quad (2.3.28)$$

donde K es una constante que depende del tipo de rugosidad en la superficie de fondo del canal, M y N son exponentes constantes.

Un ejemplo específico de la ecuación (2.3.28) es la ecuación de Manning (Chow, 1959), donde, $K = n^2$, $N = 2$ y $M = 4/3$

$$S_f = \frac{n^2|U|U}{R^{4/3}} \quad (2.3.29)$$

y en el caso de aplicar la ecuación de fricción de Chezy, donde $K = 1/C^2$, $N = 2$ y $M = 1$

$$S_f = \frac{1}{C^2} \frac{|U|U}{R} \quad (2.3.30)$$

Es conveniente que la expresión (2.3.28) tenga una forma dimensionalmente homogénea. Esto se puede realizar considerando que los parámetros dimensionales de K son:

$$[1] = \frac{K |LT^{-1}|^{N-1} LT^{-1}}{L^M} \quad (2.3.31)$$

despejando el término K de la ecuación (2.3.31)

$$K = L^{M-N} T^N \quad (2.3.32)$$

donde se concluye que la ecuación (2.3.28) no es dimensionalmente homogénea. Entonces, para tener una ecuación de fricción que no tenga problemas dimensionales, se propone trabajar con la fórmula de fricción dimensionalmente homogénea propuesta de Darcy-Weisbach (Maza, 1984), que se usa para evaluar la pérdida de energía debida a la fricción en conductos a presión

$$S_f = \frac{f |U|U}{8 g R} \quad (2.3.33)$$

Realizando una comparación entre la ecuación de Darcy-Weisbach (2.3.33) y la ecuación de Chezy (2.3.29), y despejando el coeficiente de fricción C de Chezy

$$C = \sqrt{\frac{8 g}{f}} \quad (2.3.34)$$



entonces, una forma alterna de escribir la ecuación de fricción de Chezy (2.3.29) se puede expresar como:

$$S_f = \frac{K_o}{g} \frac{|U|U}{R} \quad (2.3.35)$$

donde K_o es un parámetro sin dimensiones. Además, se conoce que el coeficiente C de Chezy se puede expresar de la forma siguiente (Maza, 1984):

$$C = \frac{R^{1/6}}{n} \quad (2.3.36)$$

donde n es el coeficiente de fricción de Manning. Sustituyendo la ecuación anterior en la ecuación de fricción (2.3.35)

$$n = \sqrt{\frac{f}{8g}} R^{1/6} \quad (2.3.37)$$

En el caso de utilizar la fórmula de Strickler para evaluar la fricción (Maza, 1984)

$$n = 0.04168 K_s^{1/6} \quad (2.3.38)$$

donde K_s es la rugosidad equivalente de fricción.

Debido a que la fórmula anterior no es dimensionalmente homogénea, entonces:

$$n = \frac{K_m}{\sqrt{g}} K_s^{1/6} \quad (2.3.39)$$

donde, K_m es una constante sin dimensiones y tiene un valor de $K_m = 0.1305455$ (Maza, 1984).

Con base en este estudio dimensional, la ecuación (2.3.29) se puede escribir de la forma siguiente:

$$S_f = \frac{K_m^2}{g} \left(\frac{K_s}{R} \right)^{1/3} \frac{|U|U}{R} \quad (2.3.40)$$

donde las dimensiones del parámetro K se pueden evaluar de forma siguiente:

$$K = \alpha K_s^\beta g^\gamma = L^\beta [LT^{-1}]^\gamma \quad (2.3.41)$$

donde, a su vez α es un parámetro constante, lo que implica que $\beta = M - N/2$, $\gamma = -N/2$ y $K = \alpha K_s^{M-N/2} g^{-N/2}$, y además, evaluando las dimensiones de la ecuación (2.3.41):

$$L^\beta [LT^{-2}]^\gamma = L^{M-N/2} [LT^2]^{-N/2} \quad (2.3.42)$$

Aplicando este resultado a la ecuación (2.3.40), y desarrollando, se tiene:

$$S_f = \alpha K_s^{M-N/2} g^{-N/2} \frac{|U|^{N-1} U}{R^M} \quad (2.3.43)$$

Un caso práctico de la ecuación anterior es considerar $N=2$ y $M=4/3$ para la condición de flujo turbulento totalmente desarrollado:



$$S_f(H,U;x,t) = \alpha \left(\frac{K_s}{R(H;x,t)} \right)^{1/3} \frac{|U|U}{g R(H;x,t)} \quad (2.3.44)$$

donde $R(H;x,t) = A(H;x,t)/P(H;x,t)$ es el radio hidráulico; $P(H;x,t)$ perímetro mojado; K_s la rugosidad absoluta del fondo y $\alpha \cong 17/100$ un parámetro adimensional (Aldama y Ocón, 1998).

Finalmente, la ecuación de fricción en función de área y gasto en su versión dimensional es:

$$S_f(A,Q;x,t) = \alpha \left(\frac{K_s}{R(A;x,t)} \right)^{1/3} \frac{|Q|Q}{g R(A;x,t)A^2} \quad (2.3.45)$$

Las ecuaciones anteriores son versiones dimensionalmente homogéneas para evaluar los efectos de fricción en la ecuaciones de Saint-Venant y será la forma de trabajar el término de fricción en todos los desarrollos que se realicen en este documento.

Por otra parte, con el fin de tener un manejo más ágil a lo largo de aquí en adelante, se definirá la presentación de las ecuaciones de Saint-Venant para sus diferentes versiones, incluyendo las condiciones de frontera e inicial en forma específica como sigue:

Definición 2.1. *Sea el sistema de ecuaciones de Saint-Venant conservativas en su versión integrodiferencial:*

- Ecuación de conservación de masa

$$\mathcal{L}(A,Q;x,t) = \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (2.3.46)$$

- Ecuación de cantidad de movimiento

$$\mathcal{M}(A,Q;x,t) = \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{Q^2}{A} \right] + g \frac{\partial I_1(A;x,t)}{\partial x} + g I_2(A;x,t) + g A [S_f(A,Q;x,t) - S_b] = 0 \quad (2.3.47)$$

donde x es la coordenada en el sentido horizontal y t el tiempo, como variables independientes; $A(x,t)$ y $Q(x,t)$ el área y gasto respectivamente, como variables dependientes; además $(x,t) \in \Omega = [0,L] \times [0,T]$ delimitan el espacio de solución; L , longitud del canal o cauce; T , tiempo final de solución; g , aceleración de la gravedad; $I_1(A;x,t)$ y $I_2(A;x,t)$, integrales que incluyen los efectos de la presión en la sección transversal (ecuaciones 2.3.18 y 2.3.19); $S_b(x)$, pendiente de la plantilla del fondo del canal y $S_f(A,Q;x,t)$ pendiente de fricción (ecuación 2.3.45).

El sistema de ecuaciones (2.3.46) y (2.3.47) constituye un problema bien planteado de valor inicial y de valores en la frontera que está sujeto a las



condiciones iniciales $A(x,0) = A_0(x)$ y $Q(x,0) = Q_0(x)$ y las condiciones de frontera se definen para:

Flujo subcrítico

$$A(L,t) = f(t) \quad ; \quad t > 0 \quad (2.3.48)$$

$$Q(0,t) = g(t) \quad ; \quad t > 0 \quad (2.3.49)$$

Flujo supercrítico

$$A(0,t) = f(t) \quad ; \quad t > 0 \quad (2.3.50)$$

$$Q(L,t) = g(t) \quad ; \quad t > 0 \quad (2.3.51)$$

Definición 2.2. *Sea el sistema de ecuaciones de Saint-Venant conservativas en su versión diferencial:*

- *Ecuación de conservación de masa*

$$\mathcal{L}(A,Q;x,t) = \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (2.3.52)$$

- *Ecuación de cantidad de movimiento*

$$\mathcal{M}(A,Q;x,t) = \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{Q^2}{A} \right] + g A \frac{\partial h(A;x,t)}{\partial x} + g A S_f(A,Q;x,t) = 0 \quad (2.3.53)$$

donde $h(A;x,t) = y(A;x,t) + z_b(x)$ la elevación de la superficie libre del agua desde un nivel de referencia; $y(A;x,t)$ elevación de la superficie libre del agua medida desde la plantilla del fondo del canal; $z_b(x)$ la elevación de la plantilla del fondo del canal desde un nivel de referencia y $S_f(A,Q;x,t)$ la pendiente de fricción (ecuación 2.3.45).

El sistema de ecuaciones (2.3.52) y (2.3.53) constituye un problema bien planteado de valor inicial y de valores en la frontera, que está sujeto a las condiciones iniciales para $A(x,0) = A_0(x)$ y $Q(x,0) = Q_0(x)$, y las condiciones de frontera se definen para flujo subcrítico y supercrítico como se describen en las ecuaciones (2.3.48) y (2.3.49), (2.3.50) y (2.3.51), respectivamente.

Definición 2.3. *Sea el sistema de ecuaciones de Saint-Venant no conservativas*

- *Ecuación de conservación de masa*

$$\mathcal{L}(H,U;x,t) = B(H;x,t) \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [U A(H;x,t)] = 0 \quad (2.3.54)$$

- *Ecuación de cantidad de movimiento*

$$\mathcal{M}(H,U;x,t) = \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + g \frac{\partial H}{\partial x} + g \frac{\partial z_b(x)}{\partial x} + g S_f(H,U;x,t) = 0 \quad (2.3.55)$$



donde $H(x,t)$ y $U(x,t)$ el tirante y la velocidad respectivamente, como variables dependientes; $A(H; x,t)$ el área hidráulica y $S_f(H,U; x,t)$ la pendiente de fricción (ecuación 2.3.44).

El sistema de ecuaciones (2.3.54) y (2.3.55) constituye un problema bien planteado de valor inicial y de valores en la frontera, que está sujeto a $H(x,0) = H_0(x)$ y $U(x,0) = U_0(x)$ como condición inicial. Las condiciones de frontera se definen para:

Flujo subcrítico

$$H(L,t) = f(t) \quad ; \quad t > 0 \quad (2.3.56)$$

$$U(0,t) = g(t) \quad ; \quad t > 0 \quad (2.3.57)$$

Flujo supercrítico

$$H(0,t) = f(t) \quad ; \quad t > 0 \quad (2.3.58)$$

$$U(0,t) = g(t) \quad ; \quad t > 0 \quad (2.3.59)$$

Como conclusión de este capítulo se puede decir que las ecuaciones de Saint-Venant, en cualquiera de sus versiones, son las leyes físicas básicas para representar el flujo en una dimensión, y tienen una amplia aplicación en la simulación de flujo en canales, ríos, surcos, etc. (Abbott, 1979; Baume *et al.* 1992; García, 1994 y Aguilar *et al.*, 1994).

Las limitaciones de su aplicación quedan en función de las hipótesis de simplificación, y propiamente se deben utilizar para la condición de flujos irrotacionales así como para los unidimensionales donde los componentes de los vectores de velocidad en la vertical y transversal son de una magnitud pequeña con respecto a la velocidad longitudinal.

En el caso de que el canal o cauce presente curvatura significativa esto implica que las líneas de corriente sufren deformaciones. Para considerar este efecto, se puede modificar el valor de la constante de fricción de Chezy, a fin de cubrir los efectos de turbulencia que se originan por el cambio de dirección (Chow, 1959; Jin y Steffler, 1993).

Finalmente, es posible utilizar la ecuación (2.3.2) para evaluar los efectos de turbulencia en la vertical. Al respecto, es necesario proponer un modelo de turbulencia a fin de cerrar el problema, debido a que los esfuerzos de Reynolds incluidos en esta ecuación no son determinados en forma explícita. Una propuesta de solución de este efecto es introducir un modelo de Boussinesq, donde se involucran la variable de viscosidad turbulenta y la escala de la turbulencia (Jin y Steffler, 1993).



CAPÍTULO 3

METODOLOGÍA PARA EL ANÁLISIS DE PROPIEDADES DE PROPAGACIÓN

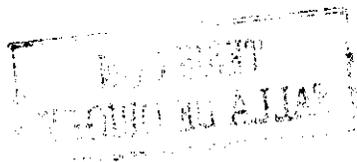
En este capítulo se presenta el marco teórico general de la metodología propuesta para determinar las propiedades de propagación de sistemas continuos y discretos, tomando en cuenta los efectos no lineales dominantes. También se establece, mediante ejemplos ilustrativos, la relación que existe entre las propiedades de propagación y los conceptos de consistencia, estabilidad y convergencia de aproximaciones discretas de ecuaciones de evolución. Este capítulo comienza con la exposición de las nociones fundamentales de la teoría de problemas numéricos de valor inicial.

3.1. Problemas de valor inicial

Considérese el siguiente problema de valor inicial, que involucra una ecuación de evolución:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathbf{N}(\mathbf{u}) \quad \text{en } (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times [0, t_F] \quad (3.1.1)$$

$$\mathbf{G}(\mathbf{u}) = \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) \quad \text{en } (\mathbf{x}, t) \in \partial\Omega \times [0, t_F] \quad (3.1.2)$$





$$\mathbf{u}(\mathbf{x},0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) \quad \text{en } \mathbf{x} \in \Omega \quad (3.1.3)$$

donde $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x},t) \equiv (u_1, u_2, \dots, u_K)^T$ es un vector K -dimensional; $\mathbf{N}(\cdot)$, un operador diferencial vectorial no lineal en el espacio de dimensión N ; $\mathbf{x} \equiv (x_1, x_2, x_3)^T$, el vector posición en el espacio tridimensional; t , tiempo; $\mathbf{G}(\cdot)$, el operador diferencial vectorial de condiciones de frontera; $\mathbf{g}(\cdot)$ y $\mathbf{u}_0(\cdot)$ son funciones conocidas del espacio-tiempo y del espacio, que respectivamente definen la condiciones de frontera y los valores iniciales; Ω es una región con frontera fija dentro de un espacio tridimensional; $\partial\Omega$, la frontera de Ω , y t_F el valor final del tiempo. El problema (3.1.1)-(3.1.3) también puede representar casos bidimensionales en los que $\mathbf{x} \equiv (x_1, x_2)$, y unidimensionales en los que $\mathbf{x} \equiv (x_1)$.

Como se explicará posteriormente, el sistema de ecuaciones (3.1.1)-(3.1.3) define un problema bien planteado si su solución existe y depende continuamente de los valores iniciales y de aquéllos especificados en la frontera (Drolet y Gray, 1988; Morton y Mayers, 1994).

3.2. Aproximaciones numéricas

Una malla espacio-temporal uniforme con intervalos constantes $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3$ y Δt divide la región $\Omega \times [0, t_F]$ y permite definir los valores discretos de \mathbf{u} mediante la operación de muestreo siguiente:

$$\mathbf{u}_j^n = \mathbf{u}(j_1 \Delta x_1, j_2 \Delta x_2, j_3 \Delta x_3, n \Delta t) \quad (3.2.1)$$

donde $\mathbf{j} = (j_1, j_2, j_3) \in \mathbf{J}_\Omega$ es un multi-índice; j_1, j_2, j_3 y n son números enteros y \mathbf{J}_Ω es el conjunto de N valores que puede adquirir el multi-índice \mathbf{j} para la malla espacial definida sobre Ω . Las normas discretas que se introducirán posteriormente pueden definirse involucrando únicamente los valores de \mathbf{j} en \mathbf{J}_Ω . En algunos casos, el conjunto \mathbf{J}_Ω puede incluir puntos ficticios en el exterior de Ω , ubicados en la vecindad cercana a $\partial\Omega$, que se introducen para discretizar condiciones de frontera que involucran derivadas espaciales. Cabe señalar que las consideraciones anteriores pueden generalizarse al caso de mallas no uniformes que comúnmente surgen en el contexto del empleo del método de elemento finito.

Sea \mathbf{U}_j^n una aproximación numérica a \mathbf{u}_j^n , los valores de \mathbf{u}_j^n y \mathbf{U}_j^n , para todos los puntos en el instante de tiempo n se denotan como \mathbf{u}^n y \mathbf{U}^n :

$$\mathbf{u}^n \stackrel{\Delta}{=} \{ \mathbf{u}_j^n, \mathbf{j} \in \mathbf{J}_\Omega \} \quad (3.2.2)$$





$$\mathbf{U}^n = \{U_j^n, j \in J_\Omega\} \quad (3.2.3)$$

Nótese que mientras u_j^n o U_j^n son vectores de dimensión K , \mathbf{u}^n y \mathbf{U}^n son vectores de magnitud KN .

Para tener un manejo ágil de la notación, se considerará que la aproximación sólo involucra dos niveles de tiempo: n y $n+1$.

Debido a que es necesario realizar comparaciones de \mathbf{u}^n con \mathbf{U}^n , resulta conveniente introducir el concepto de norma, el cual se aplicará a cada vector por separado y para la diferencia entre ambos. La norma discreta infinita o máxima se define como:

$$\|\mathbf{U}^n\|_\infty = \max \left\{ \sum_{k=1}^K |U_{k,j}^n|, j \in J_\Omega \right\} \quad (3.2.4)$$

La norma infinita continua está definida por:

$$\|\mathbf{u}\|_\infty = \max \left\{ \sum_{k=1}^K |u_k^n|, \mathbf{x} \in \Omega \right\} \quad (3.2.5)$$

donde $k = 1, 2, \dots, K$.

La norma euclidiana discreta o norma l_2 se define como:

$$\|\mathbf{U}^n\|_2 = \left\{ \sum_{k=1}^K \sum_{j \in J_\Omega} \Delta V_j |U_{k,j}^n|^2 \right\}^{1/2} \quad (3.2.6)$$

donde $\Delta V \equiv \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3$ representa un volumen de control alrededor del nodo $\mathbf{j} = (j_1, j_2, j_3)$, como se muestra en la lámina 3.1.

La norma euclidiana continua o norma L_2 se define como:

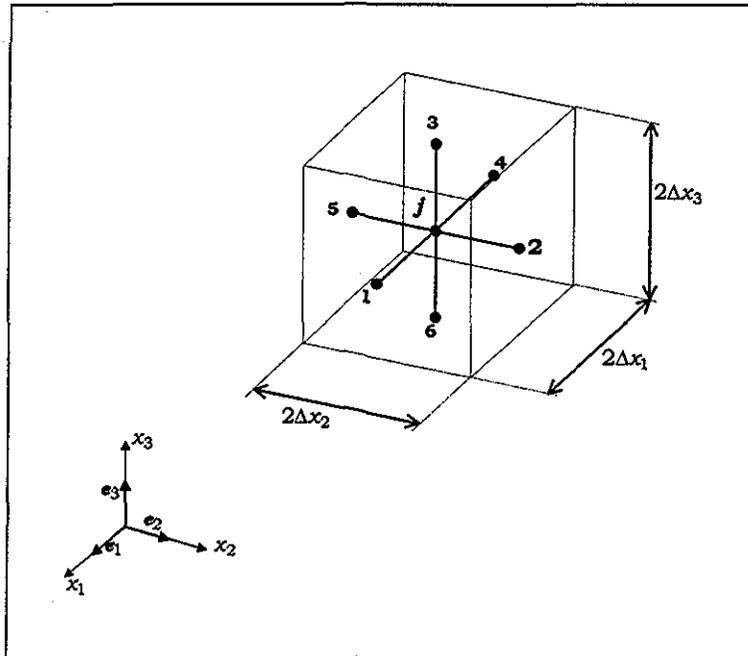
$$\|\mathbf{u}(\cdot, t_n)\|_2 = \left[\sum_{k=1}^K \int_\Omega |u_k(\mathbf{x}, t_n)|^2 dV \right]^{1/2} \quad (3.2.7)$$

donde $dV \equiv dx_1 dx_2 dx_3$.

Las definiciones anteriores de normas están inspiradas en las correspondientes normas matriciales (Milne, 1980).

Como se puede observar, la norma l_2 es una aproximación de la norma L_2 y ambas coinciden en el límite cuando $\Delta x_1, \Delta x_2$ y $\Delta x_3 \rightarrow 0$ (en el sentido de Riemann).





Lamina 3.1. Delimitación del volumen de control de la norma l_2 (en donde la posición espacial de los puntos $(1, 2, \dots, 6)$ son: $1 = x_1 + \Delta x_1$, $2 = x_2 + \Delta x_2$, $3 = x_3 + \Delta x_3$, $4 = x_1 - \Delta x_1$, $5 = x_2 - \Delta x_2$, $6 = x_3 - \Delta x_3$; además e_1, e_2 y e_3 son vectores unitarios en la dirección x_1, x_2 y x_3 respectivamente).

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

3.2.1. Discretización

La forma general de una aproximación en diferencias del problema (3.1.1) que involucra dos niveles de tiempo, se puede escribir como:

$$\mathbf{B}_1 \mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{B}_0 \mathbf{U}^n + \mathbf{F}^n \quad (3.2.8)$$

donde \mathbf{B}_1 y \mathbf{B}_0 son operadores discretos que toman la forma de matrices y \mathbf{F}^n es un vector que incluye los datos provenientes de los términos no homogéneos del operador diferencial $\mathbf{N}(\mathbf{u})$, y de los datos que se originan de los valores en la frontera.

Suponiendo que exista el operador inverso de \mathbf{B}_1 , \mathbf{B}_1^{-1} , entonces la ecuación (3.2.8) se puede escribir como:

$$\mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{B}_1^{-1} [\mathbf{B}_0 \mathbf{U}^n + \mathbf{F}^n] \quad (3.2.9)$$

Haciendo un escalamiento de la ecuación anterior, asumiendo que el resultado representa la ecuación diferencial en el limite, y considerando que $\mathbf{B}_1 = O(1/\Delta t)$, entonces



$$\mathbf{B}_1 \mathbf{u}^{n+1} - [\mathbf{B}_0 \mathbf{u}^n + \mathbf{F}^n] \rightarrow \begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \mathbf{N}(\mathbf{u}) \\ \text{condición de frontera} \end{cases} ; \text{ para } \Delta t, \Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3 \rightarrow 0 \quad (3.2.10)$$

Para ilustrar lo anterior, considérese la ecuación de advección pura siguiente:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + U \frac{\partial c}{\partial x} = 0 \quad (3.2.11)$$

donde $c = c(x, t)$ es la concentración de un contaminante y U la velocidad de transporte, que en este caso se supondrá constante. Considérese también la siguiente aproximación en diferencias, donde la variable discreta se denota como C_j^n , siendo $C_j^n \approx c(j\Delta x, n\Delta t)$:

$$\frac{C_j^{n+1} - C_j^n}{\Delta t} = -\frac{U}{2\Delta x} \delta_x C_j^n \quad (3.2.12)$$

donde $\delta_x c(x, t) = c(x - \Delta x, t) - c(x + \Delta x, t)$ es el operador espacial de diferencias centradas.

Entonces,

$$\mathbf{B}_1 = \frac{1}{\Delta t} \mathbf{I} \quad , \quad \mathbf{B}_0 = \frac{1}{\Delta t} - \frac{U}{2\Delta x} \delta_x \mathbf{I} \quad (3.2.13)$$

donde \mathbf{I} representa la matriz identidad.

Como se puede ver, en este caso la matriz \mathbf{B}_1 es un operador bien condicionado en el sentido de que existe una constante C_1 tal que $\|\mathbf{B}_1^{-1}\| \leq C_1 \Delta t$ (en este análisis es indistinto qué tipo de norma se esté usando).

3.2.2. Consistencia, orden de aproximación y convergencia

En este apartado se hará referencia a todas las operaciones límite o condiciones asintóticas asociadas con el refinamiento de la malla. Supóngase que se han seleccionado los intervalos de discretización $\Delta t, \Delta x_1, \Delta x_2$ y Δx_3 . Entonces, sea $h = \max(\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3)$ y para la determinación de la consistencia o convergencia es un requisito indispensable que $\Delta t \rightarrow 0$ y que esto suceda a una determinada razón h . A esto se le denomina "sendero de refinamiento" y puede ser denotado por $\Delta t/f(h) = \text{constante}$ (Smith, 1985). Por ejemplo, en problemas parabólicos comúnmente sucede que $\Delta t = O(h^2)$, por lo que $f(h) = h^2$ y, en problemas hiperbólicos que $\Delta t = O(h)$. El sendero de refinamiento también se puede representar como $\Delta t(h)$ y su límite, como $\Delta t(h) \rightarrow 0$, que equivale a $\Delta t \rightarrow 0$ y $h \rightarrow 0$ a tasas apropiadas.



El *error de truncado* se define, en términos de la solución exacta \mathbf{u} (Morton y Mayers, 1994) como:

$$\mathbf{T}^n \equiv \mathbf{B}_1 \mathbf{u}^{n+1} - [\mathbf{B}_0 \mathbf{u}^n + \mathbf{F}^n] \quad (3.2.14)$$

y la *consistencia* de un esquema en diferencias (3.2.8) para el problema (3.1.1)-(3.1.3) se satisface cuando:

$$\mathbf{T}_j^n \rightarrow \mathbf{0} \quad \text{para } \Delta t(h) \rightarrow 0 \quad \forall j \in \mathbf{J}_\Omega \quad (3.2.15)$$

donde \mathbf{T}_j^n es un elemento cualquiera de \mathbf{T}^n , correspondiente al nodo j .

Esta condición debe darse para toda solución de \mathbf{u} , que sea suficientemente suave del problema (3.1.1)-(3.1.3). A lo anterior se puede agregar que la condición (3.2.15) incluye la consistencia de las condiciones de frontera a través de la eliminación de los valores en la frontera de \mathbf{U} en la definición de \mathbf{B}_0 y \mathbf{B}_1 .

Sean p y q enteros mayores o iguales a uno. Si se tiene que para cualquier elemento $T_{k,j}^n$ de \mathbf{T}_j^n :

$$|T_{k,j}^n| \leq C_1 (\Delta t)^p + C_2 h^q \quad \text{cuando } \Delta t(h) \rightarrow 0 \quad \forall j \in \mathbf{J}_\Omega, \forall k \quad (3.2.16)$$

entonces se dice que el esquema tiene un orden de aproximación p para Δt y q para Δx , o el p -ésimo orden de aproximación para Δt y el q -ésimo orden de aproximación para Δx . En la expresión (3.2.16), C_1 y C_2 representan constantes positivas.

Por otra parte, el concepto de *convergencia* presupone que el sistema (3.1.1)-(3.1.3) está bien planteado. Entonces se dice que la ecuación (3.2.8) provee una *aproximación convergente* de (3.1.1)-(3.1.3) bajo la norma $\|\cdot\|$ si

$$\|\mathbf{v}^n - \mathbf{u}^n\| \rightarrow 0 \quad \text{cuando } \Delta t(h) \rightarrow 0, \quad n \Delta t \rightarrow t \in (0, t_F) \quad (3.2.17)$$

para cada \mathbf{u}^0 del problema bien planteado (3.1.1)-(3.1.3). En este contexto se puede hacer uso de cualquier norma, como las definidas con anterioridad por las ecuaciones (3.2.4) y (3.2.6).

3.2.3. Análisis de estabilidad

Sean \mathbf{v}^n y \mathbf{w}^n dos soluciones de la ecuación (3.2.8) que respectivamente corresponden a valores iniciales \mathbf{v}^0 y \mathbf{w}^0 . Entonces se dice que el esquema en diferencias (3.2.11) es *estable* dado un refinamiento de la malla $\Delta t(h)$ y bajo la norma $\|\cdot\|$ si existe una constante C tal que:



$$\| \mathbf{v}^n - \mathbf{w}^n \| \leq C \| \mathbf{v}^0 - \mathbf{w}^0 \|, \quad n \Delta t \leq t_F, \quad K > 0 \quad (3.2.18)$$

la constante C tiene que ser independiente de \mathbf{v}^0 y \mathbf{w}^0 (Morton y Mayers, 1994).

Hasta la fecha no se han propuesto metodologías generales para analizar la estabilidad de aproximaciones discretas de problemas de evolución no lineales como el planteado de (3.1.1)-(3.1.3). En vista de lo ello, en este trabajo se propone un procedimiento que permite tomar en cuenta los efectos no lineales dominantes, no sólo en la estabilidad de aproximaciones discretas, sino en otras propiedades de propagación. El marco teórico general de dicho procedimiento se presenta en las siguientes secciones.

3.3. Propagación de perturbaciones

En este trabajo se entiende por propiedades de propagación de ecuaciones diferenciales y ecuaciones en diferencias, no sólo su estabilidad, sino también la forma en que se transmiten las amplitudes y fases de sus soluciones. Las propiedades de propagación también incluyen la convergencia de esquemas iterativos para la solución de problemas algebraicos no lineales.

La metodología propuesta se compone por un estudio de propagación de perturbaciones alrededor de soluciones de referencia más un análisis de escalas múltiples y de localización. La propuesta metodológica del estudio de propagación de perturbaciones es la contribución principal de este trabajo y permite capturar los efectos no lineales dominantes, al construir ecuaciones lineales en las perturbaciones con dependencia paramétrica no lineal de soluciones de referencia. A estas ecuaciones se les practica un análisis de localización y de escalas múltiples. El resultado final de la aplicación de la metodología es la transformación del problema no lineal original en un problema de valor inicial puro y de coeficientes constantes, que incorporan en forma local los efectos no lineales dominantes.

3.3.1. Derivada de Fréchet

Definición 3.1 (Derivada de Fréchet). Sea $\mathbf{M} = (M_1, M_2, \dots, M_K)^T$ un operador vectorial no lineal (que puede tener naturaleza diferencial, algebraica u otras). Si se cumple que:

$$\mathbf{M}(\mathbf{u} + \mathbf{s}) - \mathbf{M}(\mathbf{u}) = \mathbf{M}'(\mathbf{u}) \circ \mathbf{s} + \mathbf{e}_1(\mathbf{u}; \mathbf{s}) \quad (3.3.1)$$

donde $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_N)^T$ y $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \dots, s_N)^T$ representan vectores de funciones, el símbolo " \circ " se lee "aplicado a", y además se cumple que



$$\lim_{\|s_k\| \rightarrow 0} \frac{\|e_1(u; s)\|}{\|s_k\|} = 0 \quad (3.3.2)$$

Se dice que el operador $\mathbf{M}'(\mathbf{u})$ es la derivada de Fréchet de \mathbf{M} en \mathbf{u} . (Milne, 1980).

La definición anterior implica que $\mathbf{M}'(\mathbf{u})$ es un operador lineal. En la práctica el cálculo de la derivada de Fréchet se hace de la siguiente manera:

$$\mathbf{M}'(\mathbf{u}) \circ \mathbf{s} = \partial_{u_k} \mathbf{M}(\mathbf{u}) s_k \quad (3.3.3)$$

en donde se sobreentiende la convención de suma de Einstein (Panton, 1984).

La definición 3.1 se puede aplicar en forma recursiva para definir derivadas de Fréchet de orden superior. En efecto, identificando con $\partial_{u_k} \mathbf{M}^{(r)}(\mathbf{u})$ r-ésima derivada de Fréchet de \mathbf{M} en \mathbf{u} , se tiene que:

$$\mathbf{M}^{(r-1)}(\mathbf{u} + \mathbf{s}) - \mathbf{M}^{(r-1)}(\mathbf{u}) = \mathbf{M}^{(r)}(\mathbf{u}) \circ \mathbf{s} + e_r(\mathbf{u}; \mathbf{s}) \quad (3.3.4)$$

siempre y cuando

$$\lim_{\|s_k\| \rightarrow 0} \frac{\|e_r(\mathbf{u}; \mathbf{s})\|}{\|s_k\|} = 0 \quad (3.3.5)$$

3.3.2. Expansiones en serie de Fréchet-Taylor

Con base en la definición 3.1 y la ecuación (3.3.4) es posible generalizar el concepto de expansiones en serie de Taylor a operadores, lo cual resulta en las denominadas expansiones en serie de Fréchet-Taylor. Empleando la notación utilizada anteriormente, la expansión en serie de Fréchet-Taylor de $\mathbf{M}(\mathbf{u} + \mathbf{s})$ se escribe como sigue (Milne, 1980):

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(\mathbf{u} + \mathbf{s}) = & \mathbf{M}(\mathbf{u}) + \mathbf{M}'(\mathbf{u}) \circ \mathbf{s} + \frac{1}{2!} \mathbf{M}''(\mathbf{u}) \circ \mathbf{s}^2 + \dots \\ & + \frac{1}{M!} \mathbf{M}^{(M)}(\mathbf{u}) \circ \mathbf{s}^M + o \left[\left(\sum_{n=1}^N \|s_n\| \right)^R \right] \end{aligned} \quad (3.3.6)$$

El cálculo práctico de los términos que involucran derivadas de Fréchet de diversos órdenes en la expresión anterior se efectúa como sigue:

$$\mathbf{M}^{(r)}(\mathbf{u}) \circ \mathbf{s}^r = \partial_{u_{k_1} u_{k_2} \dots u_{k_r}} \mathbf{M}(\mathbf{u}) s_{k_1} s_{k_2} \dots s_{k_r} \quad (3.3.7)$$

donde $1 \leq k_i \leq K$ y para $r = 1, 2, \dots, R$ y $1 \leq i \leq r$, y también se ha empleado la notación de suma de Einstein.



Al combinar las expresiones (3.3.6) y (3.3.7), se puede escribir

$$\mathbf{M}(\mathbf{u} + \mathbf{s}) = \sum_{r=0}^R \frac{1}{r!} \left(s_k \frac{\partial}{\partial u_k} \right)^r \circ \mathbf{M}(\mathbf{u}) + o \left[\left(\sum_{k=1}^K \|s_n\| \right)^R \right] \quad (3.3.8)$$

Como ejemplo, considérese la ecuación unidimensional de Burgers (Kevorkian y Cole, 1996):

$$M(u) \equiv \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (3.3.9)$$

es evidente en este caso que:

$$M(\cdot) \equiv \frac{\partial(\cdot)}{\partial t} + (\cdot) \frac{\partial(\cdot)}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial x^2} \equiv \frac{\partial(\cdot)}{\partial t} + N(\cdot) \quad (3.3.10)$$

donde

$$N(\cdot) \equiv (\cdot) \frac{\partial(\cdot)}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial x^2} \quad (3.3.11)$$

Como puede observarse, mientras que $N(\cdot)$ es un operador diferencial espacial no lineal (del tipo que aparece en el problema no lineal (3.1.1)-(3.1.3)), $M(\cdot)$ es un operador diferencial espacio-temporal no lineal. A partir de este punto se trabajará con $M(\cdot)$.

Sea

$$u = \bar{u} + \tilde{u} \quad (3.3.12)$$

donde \bar{u} es un valor de referencia y \tilde{u} es una pequeña perturbación.

Entonces, conforme a la expresión (3.3.6), que define la expansión en serie de Fréchet-Taylor, se puede escribir que

$$M(u) = M(\bar{u}) + M'(\bar{u}) \circ \tilde{u} + o(\|\tilde{u}\|) \quad (3.3.13)$$

Al sustituir la ecuación (3.3.13) en la ecuación de Burgers se obtiene:

$$M(u) = M(\bar{u}) + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \tilde{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} = 0 \quad (3.3.14)$$

donde, evidentemente $\tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} = O(\|\tilde{u}\|^2) = o(\|\tilde{u}\|)$. Por tanto, al comparar la relación (3.3.14) con (3.3.13) se deduce que la derivada de Fréchet de M en \bar{u} es:

$$M'(\bar{u}) \equiv \frac{\partial(\cdot)}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial(\cdot)}{\partial x} + (\cdot) \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial x^2} \quad (3.3.15)$$

que, como puede observarse es un operador que no sólo es lineal en \tilde{u} , sino que depende linealmente en \bar{u} . No obstante esta observación, en general las derivadas de Fréchet pueden depender no linealmente de la función en la cual se evalúan, como se ilustra en el siguiente ejemplo. Considérese la ecuación



Seno de Gordon, que surge en el contexto de óptica no lineal (Strikwerda, 1989):

$$M(u) \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \text{sen}(u) = 0 \quad (3.3.16)$$

donde, evidentemente:

$$M(\cdot) \equiv \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial x^2} + \text{sen}(\cdot) = 0 \quad (3.3.17)$$

Al emplear una descomposición del tipo (3.3.12) en la ecuación seno de Gordon, se llega a:

$$M(\bar{u}) + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} + \tilde{u} \cos(\bar{u}) + o(\|\tilde{u}\|) = 0 \quad (3.3.18)$$

Comparando la expresión anterior con la ecuación (3.3.13) se deduce que

$$M'(\bar{u}) = \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial x^2} + (\cdot) \cos(\bar{u}) \quad (3.3.19)$$

Como puede observarse, en este caso la derivada de Fréchet opera linealmente en \tilde{u} , pero depende no linealmente de \bar{u} .

3.3.3. Escalas múltiples y localización

Considérese de nuevo la ecuación de evolución (3.1.1), escrita ahora en la forma:

$$\mathbf{M}(\mathbf{u}) = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \mathbf{N}(\mathbf{u}) = 0 \quad \text{en } \Omega \times [0, t_f] \quad (3.3.20)$$

en donde se supone que la ecuación anterior ha sido escrita en términos adimensionales y que, por lo tanto, $\mathbf{M}(\mathbf{u})$ es de $O(1)$.

Exprésese la solución \mathbf{u} en la forma siguiente:

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} + \tilde{\mathbf{u}} \quad (3.3.21)$$

donde $\bar{\mathbf{u}}$ representa una solución de referencia de (3.3.20), esto es

$$\mathbf{M}(\bar{\mathbf{u}}) = 0 \quad (3.3.22)$$

y $\tilde{\mathbf{u}}$ representa una pequeña perturbación a dicha solución, de modo que

$$\|\bar{\mathbf{u}}_n\| \gg \|\tilde{\mathbf{u}}_n\| \quad ; \forall n \quad (3.3.23)$$

para cualquier norma apropiadamente definida. En las expresiones anteriores se supone que $u_n = O(1)$ y, por tanto, $\bar{u}_n = O(1) \forall n$.



Sustituyendo (3.3.21) en (3.3.20), y aplicando una expansión en serie de Fréchet-Taylor al resultado, se obtiene:

$$\mathbf{M}(\bar{\mathbf{u}} + \tilde{\mathbf{u}}) = \mathbf{M}'(\bar{\mathbf{u}}) \circ \tilde{\mathbf{u}} + o\left(\sum_{n=1}^N \|\tilde{\mathbf{u}}_n\|\right) = 0 \quad (3.3.24)$$

en donde se ha empleado la ecuación (3.3.22).

Como consecuencia de la definición 3.1 de la derivada de Fréchet, es posible afirmar que:

$$\mathbf{M}'(\bar{\mathbf{u}}) = O(1) \quad (3.3.25)$$

Siendo consecuentes con la expresión (3.3.23), supongamos ahora que:

$$\frac{\tilde{u}_k}{u_k} = O(\varepsilon) \quad ; \quad \forall k \quad (3.3.26)$$

en donde ε es un parámetro arbitrario que satisface

$$\varepsilon \ll 1 \quad (3.3.27)$$

Entonces, dado que el término $o\left(\sum_{k=1}^K \|\tilde{\mathbf{u}}_n\|\right)$ en la expansión (3.3.24) es cuadrático en $\sum_{k=1}^K \|\tilde{\mathbf{u}}_n\|$, la ecuación (3.3.24) puede ser escrita como:

$$\mathbf{M}'(\bar{\mathbf{u}}) \circ \tilde{\mathbf{u}} [1 + O(\varepsilon)] = 0 \quad (3.3.28)$$

Con el objeto de abordar la ecuación anterior, que gobierna la dinámica de las perturbaciones contenidas en el vector $\tilde{\mathbf{u}}$, considérese la siguiente expresión perturbatoria:

$$\tilde{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{u}}^{(0)} + \varepsilon \tilde{\mathbf{u}}^{(1)} + \dots \quad (3.3.29)$$

donde $\tilde{u}_k^{(m)} = O(\varepsilon) \quad \forall k, m$

Recordando la arbitrariedad de ε y sustituyendo la expansión anterior en (3.3.28), se obtiene la siguiente ecuación, que rige el comportamiento de la aproximación de orden cero (término dominante) a $\tilde{\mathbf{u}}$:

$$\mathbf{M}'(\bar{\mathbf{u}}) \circ \tilde{\mathbf{u}}^{(0)} = 0 \quad (3.3.30)$$

Como puede observarse, la ecuación anterior es lineal en $\tilde{\mathbf{u}}^{(0)}$, aunque de coeficientes variables, debido a la dependencia paramétrica de \mathbf{M}' con respecto a $\bar{\mathbf{u}}$.

Considérense ahora las siguientes variables espaciales y de tiempo

$$X_i = \varepsilon (x_i - x_{0i}) \quad (3.3.31)$$

$$T = \varepsilon (t - t_0) \quad (3.3.32)$$



$$\xi_i = (x_i - x_{0i}) \quad (3.3.33)$$

$$\tau = (t - t_0) \quad (3.3.34)$$

donde se supone que $|\xi| = O(1)$ y $\tau = O(1)$ y (x_{0i}, t_0) es un punto fijo en la región espacio temporal $\Omega \times [0, t_f]$.

En el lenguaje del método de escalas múltiples (Kevorkian y Cole, 1996), a X_i y T se les denomina “variables lentas”, mientras que a ξ_i y τ “variables rápidas”.

Introduzcamos ahora la siguiente hipótesis fundamental de este trabajo:

Hipótesis 3.1 (Separación de Escalas). *Se supondrá que las variables dependientes que operan en la ecuación de evolución (3.3.20) pueden descomponerse conforme a la expresión (3.3.21) (en la que está implícita la satisfacción de (3.3.23)), donde la solución de referencia \bar{u} y la perturbación \tilde{u} satisfacen las siguientes relaciones:*

$$\bar{u} = \bar{u}(\mathbf{X}, T) \quad (3.3.35)$$

y

$$\tilde{u} = \tilde{u}(\xi, \tau) \quad (3.3.36)$$

las expresiones anteriores implican que la solución de referencia depende sólo de las variables lentas, y la perturbación sólo de las variables rápidas. Esto equivale a suponer que existe una separación de escalas en la variable dependiente u .



La validez de la hipótesis anterior se comprobará a lo largo del presente estudio.

La hipótesis de separación de escalas se fundamenta en la observación de la respuesta de sistemas físicos y computacionales a la presencia de pequeñas perturbaciones, dado que los rasgos dominantes de sus propiedades de propagación (particularmente la estabilidad) se puede explicar a través del análisis *local* de la dinámica de las perturbaciones.

En efecto, considérense ahora las siguientes expresiones en serie de Taylor alrededor de un punto fijo (x_{0i}, t_0) :

$$\bar{u}_k(x_i, t) = \bar{u}_k(x_{0i}, t) + \xi_i \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_i} + \tau \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial t} + \frac{\xi_i \xi_j}{2!} \frac{\partial^2 \bar{u}_k}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\tau^2}{2!} \frac{\partial^2 \bar{u}_k}{\partial t^2} + \dots \quad (3.3.37)$$

$$\tilde{u}_k(x_i, t) = \tilde{u}_k(x_{0i}, t) + \xi_i \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_i} + \tau \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial t} + \frac{\xi_i \xi_j}{2!} \frac{\partial^2 \tilde{u}_k}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\tau^2}{2!} \frac{\partial^2 \tilde{u}_k}{\partial t^2} + \dots \quad (3.3.38)$$



Pero, conforme a la hipótesis 3.1 de separación de escalas (ecuaciones 3.3.35 y 3.3.36):

$$\frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_i} = \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial X_l} \frac{\partial X_l}{\partial x_i} = \varepsilon \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial X_l} \delta_{li} = \varepsilon \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial X_l} \quad (3.3.39)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_k}{\partial t} = \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} = \varepsilon \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial T} \quad (3.3.40)$$

donde δ_{li} representa la delta de Kronecker y

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial X_l} &= O(1) \\ \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial T} &= O(1) \end{aligned} \right\} \quad \forall i, k \quad (3.3.41)$$

De acuerdo con (3.3.39)-(3.3.41), la expansión de la solución de referencia \bar{u} toma la forma:

$$\bar{u}_k(x_i, t) = \bar{u}_{k,0} [1 + O(\varepsilon)] \quad (3.3.42)$$

donde

$$\bar{u}_{0k} \equiv \bar{u}_k(x_{0i}, t) \quad (3.3.43)$$

Por tanto, si se desea hacer un análisis en la vecindad del punto fijo (x_{0i}, t_0) , es posible *localizar* la solución de referencia \bar{u} .

En contraste con lo anterior:

$$\frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_i} = \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial \xi_l} \frac{\partial \xi_l}{\partial x_i} = \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial \xi_l} \delta_{li} = \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial \xi_i} \quad (3.3.44)$$

$$\frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial t} = \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial t} = \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial \tau} \quad (3.3.45)$$

Sustituyendo (3.3.44) y (3.3.45) en la expansión de la perturbación \tilde{u} (3.3.38):

$$\tilde{u}_k(x_i, t) = \tilde{u}_k [1 + O(1)] \quad (3.3.46)$$

por lo que la dinámica de la perturbación \tilde{u} no se puede localizar en la vecindad del punto fijo (x_{0i}, t_0) .

En términos físicos, lo anterior equivale a tomar el punto de vista de un observador sensible a escalas conmensurables con los desplazamientos ξ_i y τ



alrededor del punto fijo (x_{0i}, t_0) . Dicho observador no percibe los cambios en la solución de referencia \bar{u} , por lo que, en una primera aproximación, dicha solución puede “congelarse” en el valor que adopta en (x_{0i}, t_0) .

Al sustituir (3.3.42) en (3.3.30), y despreciando términos de $O(\varepsilon)$, se obtiene:

$$\mathbf{M}'(\bar{\mathbf{u}}_0) \circ \tilde{\mathbf{u}}^{(0)} = 0 \quad (3.3.47)$$

Como puede observarse, la ecuación anterior no es sólo lineal en $\tilde{\mathbf{u}}^{(0)}$ sino también de coeficientes constantes.

El planteamiento de la ecuación (3.3.20) presupone que el dominio espacial Ω se define de tal manera que

$$X_i = \varepsilon(x_i - x_{0i}) = O(1) \quad \text{para } \mathbf{x} \in \partial\Omega \quad (3.3.48)$$

Por tanto:

$$(x_i - x_{0i}) = O(\varepsilon^{-1}) \quad (3.3.49)$$

y cuando $\varepsilon \rightarrow 0^+$

$$|x_i - x_{0i}| \rightarrow \infty \quad (3.3.50)$$

Este resultado permite tratar (3.3.47) como un problema de valor inicial puro, en términos físicos, esto implica que el observador sensible a las escalas rápidas de variación rápida percibe la frontera $\partial\Omega$ en el infinito.

Para facilitar la presentación de las secciones posteriores, sea ahora

$$\mathbf{M}'(\bar{\mathbf{u}}_0) \equiv \frac{\partial(\cdot)}{\partial t} - \mathbf{L}(\cdot) \quad (3.3.51)$$

donde $\mathbf{L}(\cdot)$ es un operador espacial lineal de coeficientes constantes. Por tanto, a partir de este punto se considerarán problemas de valor inicial puro de la forma

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathbf{L}(\mathbf{u}) \quad \text{en } x_i \in (-\infty, \infty) \quad \forall i \quad (3.3.52)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) \quad x_i \in (-\infty, \infty) \quad \forall i \quad (3.3.53)$$

Retomando el ejemplo de la ecuación de Burgers (3.3.14), teniendo en cuenta que $\|\bar{u}\| \gg \|\tilde{u}\|$ y que se cumplen (3.3.26) y (3.3.27). La ecuación (3.3.15) se puede escribir como:

$$\mathbf{M}'(\bar{u}) \circ \tilde{u} \equiv \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \tilde{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} \quad (3.3.54)$$



Tomando una solución que gobierna la dinámica de la perturbaciones del tipo definido en (3.3.29), y reconociendo la arbitrariedad de ε , se tiene que:

$$\mathbf{M}(\bar{u}) \circ \tilde{u}^{(0)} \equiv \frac{\partial \tilde{u}^{(0)}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \tilde{u}^{(0)}}{\partial x} + \tilde{u}^{(0)} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2 \tilde{u}^{(0)}}{\partial x^2} \quad (3.3.55)$$

Considérense la siguientes variables espaciales y de tiempo alrededor de un punto fijo (x_0, t_0) en la región temporal $\Omega \times [0, t_f]$

$$X = \varepsilon(x - x_0) \quad (3.3.56)$$

$$T = \varepsilon(t - t_0) \quad (3.3.57)$$

$$\xi = (x - x_0) \quad (3.3.58)$$

$$\tau = (t - t_0) \quad (3.3.59)$$

donde $|\xi| = O(1)$ y $\tau = O(1)$.

Aplicando la hipótesis 3.1 de separación de escalas, donde $\bar{u} = \bar{u}(X, T)$ y $\tilde{u} = \tilde{u}(\xi, \tau)$; aplicando a su vez las expansiones en serie de Taylor alrededor del punto fijo en el espacio (x_0, t_0) , y aplicando además la consideración de localización (3.3.42) y (3.3.46) sobre este punto fijo, entonces la ecuación localizada de (3.3.55) es:

$$\mathbf{M}(\bar{u}_0) \circ \tilde{u}^{(0)} \equiv \frac{\partial \tilde{u}^{(0)}}{\partial t} + \bar{u}_0 \frac{\partial \tilde{u}^{(0)}}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2 \tilde{u}^{(0)}}{\partial x^2} = 0 \quad (3.3.60)$$

La expresión anterior ha sido localizada alrededor del punto fijo (x_0, t_0) , entonces el dominio espacial en este caso es $x \in (-\infty, \infty)$, como se desarrolló en (3.3.49) y (3.3.50). Entonces la ecuación que define la propagación de perturbaciones (3.3.60) es de coeficientes constantes y valor inicial puro.

Debe aclararse que la metodología presentada es también aplicable a casos en los que $\mathbf{M}(\cdot)$ representa un vector discreto que surge de la aproximación de un operador vectorial diferencial. En ese caso, se puede aplicar el procedimiento explicado hasta la obtención de la ecuación (3.3.30), que es lineal en \tilde{u} . A esta ecuación se le puede aplicar el enfoque de la ecuación modificada (Warming y Hyett, 1974), a fin de establecer cuáles son los términos dominantes, por medio del empleo de la hipótesis 3.1 de separación de escalas. Esto permite localizar la ecuación (3.3.30) y obtener una ecuación del tipo (3.3.47). La explicación de este procedimiento se ilustrará en capítulos posteriores.



3.4. Problemas lineales de valor inicial

Con base en la discusión anterior, a partir de este punto y hasta la conclusión del presente capítulo, se considerarán problemas lineales de valor inicial puros como el planteado en las ecuaciones (3.3.52) y (3.3.53)

Sea entonces \mathbf{U}_j^n una aproximación discreta a $\mathbf{u}(j_1\Delta x_1, j_2\Delta x_2, j_3\Delta x_3, n\Delta t)$ y \mathbf{U}^n el vector definido por la expresión (3.2.3). Entonces, la ecuación (3.2.8) representará ahora una aproximación discreta de la ecuación (3.3.53), los operadores \mathbf{B}_1 y \mathbf{B}_0 serán lineales debido a la ausencia de términos no homogéneos en la ecuación (3.3.52), y a que no existe influencia alguna de las condiciones de frontera $\mathbf{F}^n = 0$. Por tanto, la ecuación (3.2.8) adopta la forma:

$$\mathbf{B}_1 \mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{B}_0 \mathbf{U}^n \quad (3.4.1)$$

En este caso se supondrá que existe el operador inverso \mathbf{B}_1^{-1} tal que \mathbf{U}^{n+1} puede expresarse como:

$$\mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{B}_1^{-1} \mathbf{B}_0 \mathbf{U}^n \quad (3.4.2)$$

También se supondrá que \mathbf{B}_1^{-1} es una matriz uniformemente bien condicionada, en el sentido de que existe una constante C_1 tal que

$$\|\mathbf{B}_1^{-1}\| \leq C_1 \Delta t \quad (3.4.3)$$

independientemente de que el orden de \mathbf{B}_1 se incrementa conforme $\Delta t(h)$ se hace más pequeño y, en el límite, $\Delta t(h) \rightarrow 0$. A partir de este punto se considerará que $\|\cdot\| \equiv \|\cdot\|_\infty$.

Debido a que se está trabajando con un sistema lineal, la condición de estabilidad (3.2.18) se puede escribir como:

$$\left\| (\mathbf{B}_1^{-1} \mathbf{B}_0)^n \right\| \leq C \quad , \quad n \Delta t \leq t_F \quad (3.4.4)$$

En esta parte es conveniente revisar los requisitos que deben ser satisfechos por un problema bien planteado. Se dice que el problema (3.3.52) y (3.3.53) está bien planteado según Hadamard (Drolet y Gray 1986) si:

- i) La solución existe.
- ii) La solución es única.
- iii) La solución depende en forma continua de los datos complementarios (condiciones iniciales y parámetros).

Se puede demostrar que una condición necesaria para que el problema (3.3.52) y (3.3.53) esté bien planteado es que su solución sea estable (Drolet y Gray,



1988), esto es, que exista una constante C' , tal que para cualquier par de soluciones \mathbf{u} y \mathbf{w} (correspondiente a condiciones iniciales \mathbf{u}^0 y \mathbf{w}^0 , respectivamente) se cumpla que:

$$\|\mathbf{u}^n - \mathbf{w}^n\| \leq C' \|\mathbf{u}^0 - \mathbf{w}^0\| \quad t \leq t_F \quad (3.4.5)$$

donde $\|\cdot\|$ representa una norma continua dada por las expresiones (3.2.5) y (3.2.7).

La teoría de estabilidad de problemas discretos fue desarrollada por Lax en 1953; su principal resultado se enuncia a continuación (Smith, 1985; Ames, 1992; Morton y Mayers, 1994):

Teorema 3.1 (Teorema de equivalencia de Lax). *Teniendo una aproximación consistente de diferencias de un problema de evolución lineal bien planteado, el cual puede ser resuelto en el sentido de las ecuaciones (3.2.52) y (3.2.53), la estabilidad del esquema es necesaria y suficiente para tener convergencia.*

Demostración (de suficiencia): Extrayendo la ecuación (3.2.14) de (3.2.8), se tiene

$$\mathbf{B}_1(\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{u}^{n+1}) = \mathbf{B}_0(\mathbf{U}^n - \mathbf{u}^n) - \mathbf{T}^n \quad (3.4.6)$$

o también

$$\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{u}^{n+1} = (\mathbf{B}_1^{-1}\mathbf{B}_0)(\mathbf{U}^n - \mathbf{u}^n) - \mathbf{B}_1^{-1}\mathbf{T}^n \quad (3.4.7)$$

Asumiendo que $\mathbf{U}^0 = \mathbf{u}^0$, se tiene que:

para $n = 0$
$$\mathbf{U}^1 - \mathbf{u}^1 = (\mathbf{B}_1^{-1}\mathbf{B}_0)(\mathbf{U}^0 - \mathbf{u}^0) - \mathbf{B}_1^{-1}\mathbf{T}^0 = -\mathbf{B}_1^{-1}\mathbf{T}^0 \quad (3.4.8)$$

para $n = 1$
$$\begin{aligned} \mathbf{U}^2 - \mathbf{u}^2 &= (\mathbf{B}_1^{-1}\mathbf{B}_0)(\mathbf{U}^1 - \mathbf{u}^1) - \mathbf{B}_1^{-1}\mathbf{T}^1 \\ &= -(\mathbf{B}_1^{-1}\mathbf{B}_0)\mathbf{B}_1^{-1}\mathbf{T}^0 - \mathbf{B}_1^{-1}\mathbf{T}^1 \end{aligned} \quad (3.4.9)$$

para $n = 2$
$$\begin{aligned} \mathbf{U}^3 - \mathbf{u}^3 &= (\mathbf{B}_1^{-1}\mathbf{B}_0)(\mathbf{U}^2 - \mathbf{u}^2) - \mathbf{B}_1^{-1}\mathbf{T}^2 \\ &= -\left[(\mathbf{B}_1^{-1}\mathbf{B}_0)^2 \mathbf{B}_1^{-1}\mathbf{T}^0 + (\mathbf{B}_1^{-1}\mathbf{B}_0)\mathbf{B}_1^{-1}\mathbf{T}^1 + \mathbf{B}_1^{-1}\mathbf{T}^2 \right] \end{aligned} \quad (3.4.10)$$

y para n entero arbitrario

$$\mathbf{U}^n - \mathbf{u}^n = -\left[(\mathbf{B}_1^{-1}\mathbf{B}_0)^{n-1} \mathbf{B}_1^{-1}\mathbf{T}^0 + (\mathbf{B}_1^{-1}\mathbf{B}_0)^{n-2} \mathbf{B}_1^{-1}\mathbf{T}^1 + \dots + (\mathbf{B}_1^{-1}\mathbf{B}_0)\mathbf{B}_1^{-1}\mathbf{T}^{n-2} + \mathbf{B}_1^{-1}\mathbf{T}^{n-1} \right] \quad (3.4.11)$$

Empleando las relaciones (3.4.3) y (3.4.4) en (3.4.11) se puede construir la siguiente desigualdad:

$$\left\| (\mathbf{B}_1^{-1}\mathbf{B}_0)^m \mathbf{B}_1^{-1} \right\| \leq \left\| (\mathbf{B}_1^{-1}\mathbf{B}_0)^m \right\| \left\| \mathbf{B}_1^{-1} \right\| \leq K K_1 \Delta t \quad (3.4.12)$$



Para tener convergencia se debe cumplir que $\|U^n - u^n\| \rightarrow 0$ cuando $\Delta t(h) \rightarrow 0$. Entonces, de la ecuación (3.4.11), se puede escribir que:

$$\|U^n - u^n\| = \left\| \mathbf{B}_1^{-1} \mathbf{T}^{n-1} + (\mathbf{B}_1^{-1} \mathbf{B}_0) \mathbf{B}_1^{-1} \mathbf{T}^{n-2} + \dots + (\mathbf{B}_1^{-1} \mathbf{B}_0)^{n-1} \mathbf{B}_1^{-1} \mathbf{T}^0 \right\| \quad (3.4.13)$$

Empleando la desigualdad del triángulo:

$$\begin{aligned} \|U^n - u^n\| &\leq \left\| \mathbf{B}_1^{-1} \mathbf{T}^{n-1} \right\| + \left\| (\mathbf{B}_1^{-1} \mathbf{B}_0) \mathbf{B}_1^{-1} \mathbf{T}^{n-2} \right\| + \dots + \left\| (\mathbf{B}_1^{-1} \mathbf{B}_0)^{n-1} \mathbf{B}_1^{-1} \mathbf{T}^0 \right\| \\ &\leq \left\| \mathbf{B}_1^{-1} \right\| \left\| \mathbf{T}^{n-1} \right\| + \left\| (\mathbf{B}_1^{-1} \mathbf{B}_0) \mathbf{B}_1^{-1} \right\| \left\| \mathbf{T}^{n-2} \right\| + \dots + \left\| (\mathbf{B}_1^{-1} \mathbf{B}_0)^{n-1} \mathbf{B}_1^{-1} \right\| \left\| \mathbf{T}^0 \right\| \end{aligned} \quad (3.4.14)$$

Aplicando la relación (3.4.12) en (3.4.12), se llega a

$$\begin{aligned} \|U^n - u^n\| &\leq K K_1 \Delta t \left\| \mathbf{T}^{n-1} \right\| + K K_1 \Delta t \left\| \mathbf{T}^{n-2} \right\| + \dots + K K_1 \Delta t \left\| \mathbf{T}^0 \right\| \\ &\leq K K_1 \Delta t \sum_{m=0}^{n-1} \left\| \mathbf{T}^m \right\| \end{aligned} \quad (3.4.15)$$

Entonces, dado que para una aproximación consistente $\mathbf{T}^n \rightarrow \mathbf{0}$ para $\Delta t(h) \rightarrow 0$ de acuerdo con la ecuación (3.4.15), la convergencia resulta de la estabilidad del esquema numérico. La demostración de la necesidad de la estabilidad para garantizar la convergencia se puede consultar en Richtmyer y Morton (1967). ■

De tal modo, para cualquier esquema para el que sea sencillo establecer la consistencia, sólo es necesario establecer su estabilidad para garantizar su convergencia. Es usual que la consistencia se logre para cualquier secuencia $\Delta t \rightarrow 0$, $h \rightarrow 0$. No obstante, existen algunos casos en que hay que tener cuidado. Por ejemplo, el esquema de Dufort-Frankel (Morton y Mayers, 1994), que aplicado a la ecuación adimensional de calor en una dimensión resulta en:

$$\frac{U_j^{n+1} - U_j^{n-1}}{2 \Delta t} = \frac{U_{j+1}^n - U_j^{n+1} - U_j^{n-1} + U_{j-1}^n}{\Delta x^2} \quad (3.4.16)$$

Este esquema tiene la ventaja de ser explícito y, sin embargo, es incondicionalmente estable. El error de truncado está dado por

$$T = \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + O \left(\Delta t^2 + \Delta x^2 + \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \right) \quad (3.4.17)$$

Este esquema es consistente con la ecuación de calor sólo si $\Delta t = O(\Delta x^2)$. Como resultado, se tiene que la condición de consistencia, a medida que se realiza un refinamiento de la malla, es la que define la condición de convergencia, en vez de que ésta sea definida solamente por la condición de estabilidad.



Tal resultado enfatiza que el teorema de equivalencia de Lax involucra no solamente la norma seleccionada para definir la estabilidad y la convergencia, sino también el refinamiento de la malla empleado.

3.4.1. Análisis de Fourier de problemas continuos de valor inicial

La forma más general del sistema de ecuaciones lineales y de coeficientes constantes (3.3.52), puede ser escrita como (Champeney, 1987):

$$\partial_t u_q = \sum_{r=1}^Q \sum_{\mathbf{p} \in P_c} \alpha_{qr, \mathbf{p}} \partial_{\mathbf{p}} u_r \quad ; \quad q = 1, 2, \dots, Q \quad (3.4.18)$$

donde $\partial_t(\cdot) = \partial(\cdot)/\partial t$ representa el número de ecuaciones diferenciales que constituyen el sistema (3.4.18) (y, obviamente, de incógnitas u_q); $\mathbf{p} \equiv (p_1, p_2, p_3)$ representa el multíndice; $P_c \equiv \{(p_1, p_2, p_3) \mid 0 \leq p_1 + p_2 + p_3 \leq R\}$, donde R es el máximo orden de las derivadas espaciales presentes en (3.4.18); $\alpha_{qr, \mathbf{p}}$, para $q = 1, 2, \dots, Q$, $r = 1, 2, \dots, Q$ y $\mathbf{p} \in P_c$, son coeficientes constantes, y $\partial_{\mathbf{p}}(\cdot) \equiv \partial^{p_1+p_2+p_3}(\cdot)/\partial x_1^{p_1} \partial x_2^{p_2} \partial x_3^{p_3}$.

De acuerdo con la expresión (3.3.52), el sistema (3.4.18) está sujeto a los valores iniciales

$$u_q(\mathbf{x}, 0) = u_q^0(\mathbf{x}) \quad ; \quad \mathbf{x} \in \Omega_\infty \quad (3.4.19)$$

donde $\mathbf{x} \in (x_1, x_2, x_3)$ y $\Omega_\infty \equiv (-\infty, \infty) \times (-\infty, \infty) \times (-\infty, \infty)$ representa el espacio infinito.

Suponiendo que u_q sea absoluta o cuadráticamente integrable, $\forall q$ poseerá una representación integral de Fourier de la forma (anexo B):

$$u_q(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\Omega_\infty} \hat{u}_q(\mathbf{k}, t) e^{i \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{k} \quad (3.4.20)$$

donde $d\mathbf{k} \equiv dk_1 dk_2 dk_3$; $\int_{\Omega_\infty}(\cdot) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (\cdot) dk_1 dk_2 dk_3$; $\mathbf{k} = (k_1, k_2, k_3)$ es el vector de números de onda, y $\hat{u}_q(\mathbf{k}, t)$ está dada por:

$$\hat{u}_q(\mathbf{k}, t) \equiv \mathfrak{F}\{\hat{u}_q(\mathbf{x}, t)\} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\Omega_\infty} u_q(\mathbf{x}, t) e^{i \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{x} \quad (3.4.21)$$

donde $d\mathbf{x} \equiv dx_1 dx_2 dx_3$. Las expresiones (3.4.20) y (3.4.21) representan un par continuo de Fourier.



Consideremos ahora una solución particular del sistema (3.4.18), para \mathbf{k} fijo pero arbitrario, de la forma:

$$(u_q)_s(\mathbf{x}, t) = (\hat{u}_q)_s(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \quad ; \quad q = 1, 2, \dots, Q \quad (3.4.22)$$

Dado que (3.4.22) satisface (3.4.18), es posible escribir

$$\frac{\partial (\hat{u}_q)_s}{\partial t} = \sum_{r=1}^Q \sum_{0 \leq p_1 + p_2 + p_3 \leq R} \alpha_{qr,p} (ik_1)^{p_1} (ik_2)^{p_2} (ik_3)^{p_3} (\hat{u}_r)_s \quad ; \quad q = 1, 2, \dots, Q \quad (3.4.23)$$

Dado que \mathbf{k} es fijo, el sistema (3.4.23) puede ser tratado como uno de ecuaciones diferenciales homogéneas, haciendo (Wylie, 1994):

$$(u_q)_s(\mathbf{k}, t) = (\hat{u}_q^0)_s(\mathbf{k}) e^{-i\omega(\mathbf{k})t} \quad ; \quad q = 1, 2, \dots, Q \quad (3.4.24)$$

donde ω representa una frecuencia (en general compleja) y $(\hat{u}_q^0)_s$ el valor inicial de $(u_q)_s$.

Substituyendo (3.4.24) en (3.4.23) se obtiene:

$$\sum_{r=1}^Q \beta_{qr}(\mathbf{k}, \omega) (\hat{u}_r^0)_s(\mathbf{k}) = 0 \quad ; \quad q = 1, 2, \dots, Q \quad (3.4.25)$$

donde

$$\beta_{qr}(\mathbf{k}, \omega) = \sum_{p \in P_c} \alpha_{qr,p} \prod_{l=1}^3 (ik_l)^{p_l} + i\omega \delta_{qr} \quad ; \quad q = 1, 2, \dots, Q \quad (3.4.26)$$

Sea $\mathbf{B} = [\beta_{qr}]$ una matriz cuadrada de orden Q y $\hat{\mathbf{u}}_s^0$ un vector de orden Q , entonces la expresión (3.4.25) se puede escribir en notación vectorial como sigue:

$$\mathbf{B} \hat{\mathbf{u}}_s^0 = \mathbf{0} \quad (3.4.27)$$

La ecuación (3.4.27) representa un sistema algebraico lineal y homogéneo, que tiene solución distinta a la trivial si y sólo si

$$P_c^{(Q)} \equiv \det(\mathbf{B}) = 0 \quad (3.4.28)$$

donde $P_c^{(Q)}$ es un polinomio de grado Q en ω , por lo que (3.4.28) es una ecuación polinomial de grado Q en ω . Sean $\omega_1(\mathbf{k}), \omega_2(\mathbf{k}), \dots, \omega_Q(\mathbf{k})$ las raíces de la ecuación (3.4.28), respectivamente correspondientes a $\hat{\mathbf{u}}_1^0, \hat{\mathbf{u}}_2^0, \dots, \hat{\mathbf{u}}_Q^0$. Habida cuenta de lo anterior, y substituyendo (3.4.24) en (3.4.22) (con $\omega = \omega_s$), se obtiene la siguiente expresión para la s -ésima solución particular del sistema (3.4.18) por \mathbf{k} fijo:

$$(u_q)_s(\mathbf{x}, t) = (\hat{u}_q^0)_s^{(\beta)} e^{i[\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega_s(\mathbf{k})t]} \quad (3.4.29)$$



Dado que (3.4.18) es lineal y homogéneo, la superposición de soluciones particulares del tipo (3.4.29) también será solución de (3.4.18), esto es:

$$\begin{aligned} \hat{u}_q(\mathbf{x}, t; \mathbf{k}) &= \sum_{s=1}^Q (u_q)_s(\mathbf{x}, t) \\ &= \sum_{s=1}^Q (\hat{u}_q^0)_s(\mathbf{k}) e^{i[\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega_s(\mathbf{k})t]} \quad ; \quad q = 1, 2, \dots, Q \end{aligned} \quad (3.4.30)$$

La solución general de (3.4.18) puede construirse superponiendo las soluciones del tipo (3.4.30) para todo \mathbf{k} , del modo siguiente:

$$\begin{aligned} u_q(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\Omega_\infty} u_q(\mathbf{x}, t; \mathbf{k}) d\mathbf{k} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\Omega_\infty} \sum_{s=1}^Q (\hat{u}_q^0)_s(\mathbf{k}) e^{i[\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega_s(\mathbf{k})t]} d\mathbf{k} \quad ; \quad q = 1, 2, \dots, Q \end{aligned} \quad (3.4.31)$$

La expresión (3.4.31) adopta la forma siguiente para $t = 0$:

$$u_q^0(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\Omega_\infty} \sum_{s=1}^Q (\hat{u}_q^0)_s(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{k} \quad ; \quad q = 1, 2, \dots, Q \quad (3.4.32)$$

por lo que, en vista de (3.4.20) y (3.4.21), es evidente que

$$\sum_{s=1}^Q (\hat{u}_q^0)_s(\mathbf{k}) = \mathfrak{F}\{u_q^0(\mathbf{x})\} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\Omega_\infty} \hat{u}_q^0(\mathbf{x}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{x} \quad ; \quad q = 1, 2, \dots, Q \quad (3.4.33)$$

Como $\det(\mathbf{B}) = 0$, una ecuación en cada uno de los sistemas (3.4.27) (para $s = 1, 2, \dots, Q$) debe ser eliminada. Esto hace que permanezcan $Q^2 - Q$ ecuaciones en las Q^2 incógnitas $(\hat{u}_q^0)_1, (\hat{u}_q^0)_2, \dots, (\hat{u}_q^0)_Q$; $q = 1, 2, \dots, Q$. La expresión (3.4.33) suple las Q ecuaciones faltantes, que además son inhomogéneas, lo cual permite la solución del problema de valor inicial planteado para las ecuaciones (3.4.18) y (3.4.19).

Retomando el problema de la ecuación de Bourges (3.3.60), y dado que esta ecuación es un problema bien planteado con coeficientes constantes de valor inicial puro:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u_0 \frac{\partial u}{\partial x} = v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad ; \quad x \in (-\infty, \infty) \quad (3.4.34)$$

sujeta a la condición inicial $u(x, 0) = f(x)$, en donde $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty$. Sustituyendo

la ecuación (3.4.30) en (3.4.34) para obtener una solución en serie Fourier para un número de onda arbitrario



$$\omega = \omega(k) = u_0 k - i \nu k^2 \quad (3.4.35)$$

la ecuación anterior constituye la relación de dispersión del sistema continuo (3.4.34).

La solución de la ecuación (3.4.34) particular para un número de onda arbitrario k se obtiene substituyendo en ésta la relación de dispersión (3.4.35). Entonces:

$$u_p(x, t; k) = \hat{u}(k) e^{-\nu k^2 t} e^{i[kx - k u_0 t]} \quad (3.4.36)$$

Como la solución anterior es para un número onda k arbitrario, entonces la solución general se construye aplicando el principio de superposición, de forma que:

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(k) e^{-\nu k^2 t} e^{i[kx - k u_0 t]} dk \quad (3.4.37)$$

Por otra parte, para satisfacer la condición inicial del problema (3.4.34), se debe cumplir que

$$u(x, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(k) e^{ikx} dx = f(x) \quad (3.4.38)$$

lo que implica que se tenga la siguiente transformación:

$$\hat{u}(k) \equiv \hat{f}(k) = \mathfrak{F}\{f\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ikx} dx \quad (3.4.39)$$

Con base en lo anterior, la solución (3.4.37) adopta la forma

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{-\nu k^2 t} e^{i[kx - k u_0 t]} dk \quad (3.4.40)$$

En (3.4.40) es importante notar que el comportamiento de la función en la condición inicial es esencial para tener una solución adecuada del problema (3.4.34). Por otra parte, en la ecuación (3.4.40) se tienen problemas de convergencia en la solución de la integral, en el caso de tener un valor de $\nu < 0$. Esto es debido a que se estaría integrando una función mal portada. A este problema se le conoce como condición de estabilidad de la ecuación (3.4.34).



3.4.2. Análisis de Fourier de problemas discretos de valor inicial

El sistema (3.4.1) es lineal y de coeficientes constantes y, dado que ha surgido de la discretización de un sistema de ecuaciones de evolución, puede ser escrito en la forma siguiente:

$$\sum_{r=1}^Q \sum_{\mathbf{p} \in \mathbf{P}_D} a_{qr,\mathbf{p}} U_{r,\mathbf{j}+\mathbf{p}}^{n+1} = \sum_{r=1}^Q \sum_{\mathbf{p} \in \mathbf{P}_D} b_{qr,\mathbf{p}} U_{r,\mathbf{j}+\mathbf{p}}^n \quad ; \quad q = 1, 2, \dots, Q \quad (3.4.41)$$

donde $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$ representa un multiíndice de desplazamiento alrededor de un nodo típico $\mathbf{j} = (j_1, j_2, j_3)$; \mathbf{P}_D , la región del espacio discreto infinito involucrada en la discretización de los operadores diferenciales presentes en la ecuación (3.3.52) (lámina 3.1); $U_{r,\mathbf{j}+\mathbf{p}}^n$, una aproximación discreta a $u_r(j_1\Delta x_1, j_2\Delta x_2, j_3\Delta x_3, n\Delta t)$ para $r = 1, 2, \dots, Q$; y $a_{qr,\mathbf{p}}$ y $b_{qr,\mathbf{p}}$, para $q = 1, 2, \dots, Q$, $r = 1, 2, \dots, Q$, $\mathbf{p} \in \mathbf{P}_D$, son coeficientes constantes que sólo dependen de los parámetros de discretización $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3$ y Δt .

En el anexo B se muestra que una función discreta, definida sobre una malla tridimensional trazada en el espacio infinito, posee la siguiente representación de Fourier:

$$U_{q,\mathbf{j}}^n = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbf{k} \in K} \hat{U}_q^n(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_j} d\mathbf{k} \quad ; \quad q = 1, 2, \dots, Q \quad (3.4.42)$$

donde $\mathbf{k} = (k_1, k_2, k_3)$ representa el vector de números de onda $K = [-\pi/\Delta x_1, \pi/\Delta x_1] \times [-\pi/\Delta x_2, \pi/\Delta x_2] \times [-\pi/\Delta x_3, \pi/\Delta x_3]$, $\mathbf{x}_j = (j_1\Delta x_1, j_2\Delta x_2, j_3\Delta x_3)$,

$d\mathbf{k} = dk_1 dk_2 dk_3$, $\int_{\mathbf{k} \in K} (\cdot) d\mathbf{k} = \int_{-\pi/\Delta x_1}^{\pi/\Delta x_1} \int_{-\pi/\Delta x_2}^{\pi/\Delta x_2} \int_{-\pi/\Delta x_3}^{\pi/\Delta x_3} (\cdot) dk_1 dk_2 dk_3$ y, finalmente, $\hat{U}_q^n(\mathbf{k})$

es la transformada semidiscreta de Fourier de $U_{q,\mathbf{j}}^n$, definida por:

$$\hat{U}_q^n(\mathbf{k}) = \frac{\Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{\mathbf{j} \in \mathbf{Z}^3} U_{q,\mathbf{j}}^n e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_j} \quad (3.4.43)$$

donde $\mathbf{k} \in K$, \mathbf{Z} es el conjunto de números enteros y $\sum_{\mathbf{j} \in \mathbf{Z}^3} (\cdot) = \sum_{j_1=-\infty}^{\infty} \sum_{j_2=-\infty}^{\infty} \sum_{j_3=-\infty}^{\infty} (\cdot)$.

Las expresiones (3.4.42) y (3.4.43) constituyen un par semidiscreto de Fourier.

El sistema de ecuaciones de diferencias (3.4.41) está sujeto a valores iniciales $U_{q,\mathbf{j}}^0$ para $q = 1, 2, \dots, Q$, $\mathbf{j} \in \mathbf{Z}^3$, dados por el muestreo discreto de los valores iniciales correspondientes al problema continuo, esto es:

$$U_{q,\mathbf{j}}^0 = u_q(j_1\Delta x_1, j_2\Delta x_2, j_3\Delta x_3, 0) \quad (3.4.44)$$



Procédase ahora a buscar una solución *particular* del sistema (3.4.41). Identifíquese dicha solución como $(U_{q,j}^n)_s$ y empléese una representación de Fourier del tipo (3.4.42) para la misma:

$$(U_{q,j}^n)_s = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbf{k} \in K} (\hat{U}_q^n)_s(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_j} d\mathbf{k} \quad ; \quad q = 1, 2, \dots, Q \quad (3.4.45)$$

donde $(\hat{U}_q^n)_s(\mathbf{k})$ representa la transformada semidiscreta de Fourier de $(U_{q,j}^n)_s$.

Dado que $(U_{q,j}^n)_s$ es una solución del sistema (3.4.41), se puede escribir que:

$$\int_{\mathbf{k} \in K} \left\{ \sum_{r=1}^Q \sum_{\mathbf{p} \in P_D} [a_{qr,p} (\hat{U}_r^{n+1})_s(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_p} - b_{qr,p} (\hat{U}_r^n)_s(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_p}] \right\} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_p} d\mathbf{k} = 0 \quad (3.4.46)$$

$$; \quad q = 1, 2, \dots, Q$$

donde $\mathbf{x}_p \equiv (p_1 \Delta x_1, p_2 \Delta x_2, p_3 \Delta x_3)$ y el intercambio de la integral con las sumatorias se justifica rigurosamente, en vista de la finitud de éstas y de la compacidad del soporte de aquélla.

Ahora bien, tanto la ecuación discreta (3.4.41) como la representación integral (3.4.45) son válidas para cualquier terna de parámetros de discretización espacial $(\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3)$. Esto confiere al soporte compacto K de la integral, que aparece en (3.4.46) con un carácter arbitrario. Entonces, dado que dicha integral es nula, se concluye que su integrando debe anularse, lo cual implica que

$$\sum_{r=1}^Q \sum_{\mathbf{p} \in P_D} [a_{qr,p} (\hat{U}_r^{n+1})_s(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_p} - b_{qr,p} (\hat{U}_r^n)_s(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_p}] = 0 \quad ; \quad q = 1, 2, \dots, Q \quad (3.4.47)$$

ya que $e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_p} \neq 0$. El resultado anterior es una expresión del conocido hecho de que los modos de Fourier no interactúan en sistemas lineales de coeficientes constantes.

La expresión (3.4.45) constituye un sistema lineal y de coeficientes constantes de ecuaciones de diferencias, de primer orden en n . La solución del mismo se obtiene escribiendo (Strikwerda, 1989):

$$(\hat{U}_q^{n+1})_s(\mathbf{k}) = \rho(\mathbf{k}) (\hat{U}_q^n)_s(\mathbf{k}) \quad ; \quad q = 1, 2, \dots, Q \quad (3.4.48)$$

donde $\rho = \rho(\mathbf{k})$ se denomina factor de amplificación. Sustituyendo (3.4.48) en (3.4.47) resulta que:

$$\sum_{r=1}^Q \sum_{\mathbf{p} \in P_D} [a_{qr,p} \rho(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_p} - b_{qr,p} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_p}] (\hat{U}_r^{n+1})_s(\mathbf{k}) = 0 \quad ; \quad q = 1, 2, \dots, Q \quad (3.4.49)$$



La ecuación (3.4.49) también puede ser escrita como:

$$\sum_{r=1}^Q c_{qr} \left(\hat{U}_r^{n+1} \right)_s(\mathbf{k}) = 0 \quad ; \quad q = 1, 2, \dots, Q \quad (3.4.50)$$

donde

$$c_{qr}(\mathbf{k}) = \sum_{p \in P_D} \left[a_{qr,p} \rho(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_p} - b_{qr,p} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_p} \right] \quad ; \quad q = 1, 2, \dots, Q, r = 1, 2, \dots, Q \quad (3.4.51)$$

Sean $\mathbf{C} = [c_{qr}]$ una matriz cuadrada de orden Q y $\hat{\mathbf{U}}_q^n = \left[\left(\hat{U}_q^n \right)_s \right]^T$ un vector de orden Q . Entonces, la expresión (3.4.50) puede ser escrita en forma vectorial como:

$$\mathbf{C} \hat{\mathbf{U}}_s^n = \mathbf{0} \quad (3.4.52)$$

Evidentemente, (3.4.52) representa un sistema algebraico lineal y homogéneo, que posee soluciones distintas a la trivial si y sólo si el determinante de la matriz de coeficientes se anula, esto es:

$$P_d^{(Q)}[\rho(\mathbf{k})] \equiv \det(\mathbf{C}) = 0 \quad (3.4.53)$$

donde $P_d^{(Q)}[\rho]$ es un polinomio de grado Q en ρ , por lo que la expresión (3.4.53) es una ecuación polinomial de grado Q en ρ . Sean $\rho_1(\mathbf{k}), \rho_2(\mathbf{k}), \dots, \rho_Q(\mathbf{k})$ las raíces de la ecuación (3.4.53) correspondientes a $\hat{\mathbf{U}}_1^n, \hat{\mathbf{U}}_2^n, \dots, \hat{\mathbf{U}}_Q^n$. La solución general del sistema (3.4.41) puede entonces construirse como sigue:

$$\begin{aligned} U_{q,j}^n &= \left(U_{q,j}^n \right)_1 + \left(U_{q,j}^n \right)_2 + \dots + \left(U_{q,j}^n \right)_Q \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbf{k} \in K} \left[\rho_1^n(\mathbf{k}) \left(\hat{U}_q^0 \right)_1(\mathbf{k}) + \rho_2^n(\mathbf{k}) \left(\hat{U}_q^0 \right)_2(\mathbf{k}) + \dots + \rho_Q^n(\mathbf{k}) \left(\hat{U}_q^0 \right)_Q(\mathbf{k}) \right] e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_j} d\mathbf{k} \quad (3.4.54) \end{aligned}$$

$; \quad q = 1, 2, \dots, Q$

dado que la ecuación (3.4.48) implica que

$$\left(\hat{U}_q^n \right)_s = \rho^n \left(\hat{U}_q^0 \right)_s \quad ; \quad q = 1, 2, \dots, Q, s = 1, 2, \dots, S \quad (3.4.55)$$

La ecuación (3.4.54) adopta la siguiente forma para $n = 0$:

$$U_{q,j}^0 = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbf{k} \in K} \left[\left(\hat{U}_q^0 \right)_1(\mathbf{k}) + \left(\hat{U}_q^0 \right)_2(\mathbf{k}) + \dots + \left(\hat{U}_q^0 \right)_Q(\mathbf{k}) \right] e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_j} d\mathbf{k} \quad ; \quad q = 1, 2, \dots, Q \quad (3.4.56)$$

La comparación de la expresión (3.4.56) con el par de Fourier (3.4.42)-(3.4.43) permite escribir:

$$\left(\hat{U}_q^0 \right)_1(\mathbf{k}) + \left(\hat{U}_q^0 \right)_2(\mathbf{k}) + \dots + \left(\hat{U}_q^0 \right)_Q(\mathbf{k}) = \frac{\Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{\mathbf{k} \in \mathbf{Z}^3} U_{q,j}^0 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_j} \quad ; \quad q = 1, 2, \dots, Q \quad (3.4.57)$$



Dado que $\det(\mathbf{C})=0$, una ecuación de cada uno de los sistemas (3.4.50) o (3.4.51) con $n = 0$ (para $s = 1, 2, \dots, Q$) debe ser eliminada. Esto da por resultado $Q^2 - Q$ ecuaciones en la Q^2 incógnitas $(\hat{U}_q^0)_1 + (\hat{U}_q^0)_2 + \dots + (\hat{U}_q^0)_2$; $q = 1, 2, \dots, Q$, y la solución del problema que se plantea en las ecuaciones (3.4.34) y (3.4.37).

Al comparar (3.4.54) con (3.4.56), es evidente que la condición

$$|\rho_s| \leq 1 \quad ; \quad s = 1, 2, \dots, Q \tag{3.4.58}$$

lo cual garantiza que

$$\|U^n\| \leq \|U^0\| \tag{3.4.59}$$

donde $\| \cdot \|$ puede representar la norma infinita o la norma euclidiana en sus versiones discretas.

Al comparar (3.4.59) con (3.2.18) y con $W^n = W^0 = 0$, se concluye que la condición (3.4.58), llamada de estabilidad estricta, es suficiente para que la solución (3.4.41) y (3.4.44) sea estable.

A manera de ejemplo, se propone elaborar una discretización en diferencias viento arriba a la ecuación de Bourgues (3.3.34)

$$\frac{\tilde{U}_j^{n+1} - \tilde{U}_j^n}{\Delta t} + u_0 \frac{\tilde{U}_{j+1}^n - \tilde{U}_j^n}{\Delta x} = v \frac{\tilde{U}_{j+1}^n - 2\tilde{U}_j^n + \tilde{U}_{j-1}^n}{\Delta x^2} \tag{3.4.60}$$

sujeta a la condición inicial $\tilde{U}_j^0 = f(j\Delta x)$. Sea $U = U(x, t)$ una función con suficiente grado de continuidad de tal manera que:

$$U = U(j\Delta x, n\Delta t) \equiv U_j^n = \tilde{U}_j^n \quad \forall j, n \tag{3.4.61}$$

Entonces se aplica el método de Fourier al esquema numérico (3.4.60) proponiendo la aproximación en serie de Fourier

$$U_p(x, t; k) = \hat{U}(k) e^{i[kx - \tilde{\omega}(k)t]} \tag{3.4.62}$$

lo cual es una solución particular del esquema (3.4.60), y desarrollando la ecuación anterior

$$\begin{aligned} U_{pj}^n &= U_p(j\Delta x, n\Delta t; k) = \hat{U}(k) e^{i[kj\Delta x - \tilde{\omega}(k)n\Delta t]} \\ &\equiv \hat{U}(k) \rho_k^n e^{ikj\Delta x} \end{aligned} \tag{3.4.63}$$

donde $\rho_k^n \equiv e^{-i\tilde{\omega}(k)n\Delta t}$ es el factor de amplificación del k -ésimo modo de Fourier.

Sustituyendo la ecuación (3.4.63) en el esquema en diferencias finitas (3.4.60)

$$\hat{U} \frac{(\rho_k - 1)}{\Delta t} + \hat{U} \frac{u_0}{\Delta x} [\cos(k\Delta x) + i \operatorname{sen}(k\Delta x) - 1] - \hat{U} v \frac{\Delta t}{\Delta x^2} [\cos(k\Delta x) - 1] = 0 \tag{3.4.64}$$

En el sistema anterior se pueden tener dos soluciones. Entonces obviando la solución trivial, se tiene que



$$\rho_k = 1 - C_r [\cos(k\Delta x) + i \operatorname{sen}(k\Delta x) - 1] + 2 \frac{C_r}{P_e} [\cos(k\Delta x) - 1] \quad (3.4.65)$$

donde $C_r = u_0 \Delta t / \Delta x$ es el número de Courant (Abbott, 1979) y $P_e = u_0 \Delta x / \nu$ el número de Peclet (Fischer, 1981).

Aplicando la condición de estabilidad $|\hat{\rho}_k| \leq 1$ en (3.4.64) se tiene:

$$C_r \leq \frac{2 \left(\frac{2}{P_e} - 1 \right) (1 - \cos(k\Delta x))}{\left(\frac{2}{P_e} - 1 \right)^2 (\cos(k\Delta x) - 1)^2 + (1 - \cos^2(k\Delta x))} \quad (3.4.66)$$

la condición más crítica de estabilidad corresponde para $C_{r,cr} = \min_{k\Delta x} F(k\Delta x; P_e)$, la cual se presenta para la condición de $\cos(k\Delta x) = -1$, dado que $0 \leq k\Delta x \leq \pi$, lo que implica que $k\Delta x = \pi$. Entonces la condición de estabilidad crítica es

$$C_r \leq \frac{1}{\left(\frac{2}{P_e} - 1 \right)} \quad (3.4.67)$$

Aplicar el método de Fourier permite también determinar el grado de convergencia como está indicado en el Teorema Equivalente de Lax, así como la construcción de la ecuación modificada. La forma de demostrar el grado de convergencia se realiza substituyendo $\rho = e^{-i\omega_n \Delta t}$ en la ecuación (3.4.64), de manera que

$$\rho_k = e^{-i\omega_n \Delta t} = 1 - u_0 \frac{\Delta t}{\Delta x} [\cos(k\Delta x) + i \operatorname{sen}(k\Delta x) - 1] + 2\nu \frac{\Delta t}{\Delta x^2} [\cos(k\Delta x) - 1] \quad (3.4.68)$$

Aplicando una expansión en serie de Taylor a la parte izquierda y derecha de la ecuación (3.4.67)

$$\rho_k = 1 - i\omega_n \Delta t - \frac{1}{2} \omega_n^2 \Delta t^2 + \frac{i}{6} \omega_n^3 \Delta t^3 + O(\Delta t^3) \quad (3.4.69)$$

$$1 - u_0 \frac{\Delta t}{\Delta x} [\cos(k\Delta x) + i \operatorname{sen}(k\Delta x) - 1] + 2\nu \frac{\Delta t}{\Delta x^2} [\cos(k\Delta x) - 1] = 1 - \left[u_0 k + \frac{i}{2} \nu k^2 \right] \Delta t + \frac{i}{2} u_0 k^2 \Delta x \Delta t + O(\Delta x^2 \Delta t) \quad (3.4.70)$$

donde ω_n , es la frecuencia numérica, y substituyendo las expansiones (3.4.69) y (3.4.70) en 3.4.68, se tiene

$$\omega_n - \frac{i}{2} \omega_n^2 \Delta t - \frac{1}{6} \omega_n^3 \Delta t^2 + O(\Delta t^3) = u_0 k + \frac{i}{2} \nu k^2 + \frac{i}{2} u_0 k^2 \Delta x + O(\Delta x^2) \quad (3.4.71)$$



Considerando que la frecuencia ω_n tiene una solución perturbatoria del tipo siguiente:

$$\begin{aligned} \omega_n = & \omega_{00} + \Delta t \omega_{10} + \Delta x \omega_{01} + \Delta t^2 \omega_{20} + \Delta t \Delta x \omega_{11} + \Delta x^2 \omega_{02} + \dots + \\ & - \frac{i}{2} \Delta t (\omega_{00} + \Delta t \omega_{10} + \Delta x \omega_{01} + \Delta t^2 \omega_{20} + \Delta t \Delta x \omega_{11} + \Delta x^2 \omega_{02} + \dots)^2 + \\ & - \frac{i}{6} \Delta t^2 (\omega_{00} + \Delta t \omega_{10} + \Delta x \omega_{01} + \Delta t^2 \omega_{20} + \Delta t \Delta x \omega_{11} + \Delta x^2 \omega_{02} + \dots)^3 + \dots \end{aligned} \quad (3.4.72)$$

Igualando los términos con igual orden de aproximación entre las ecuaciones (3.4.71) y (3.4.72), de forma que:

$$\omega_{00} = u_0 k \quad (3.4.73)$$

$$\omega_{10} = \frac{i}{2} u_0^2 k^2 \quad (3.4.74)$$

$$\omega_{01} = \frac{i}{2} u_0 k^2 \quad (3.4.75)$$

De esta manera, la ecuación de perturbación (3.4.72) es:

$$\omega_n = u_0 k + \frac{i}{2} u_0^2 k^2 \Delta t + \frac{i}{2} u_0 k^2 \Delta x + \dots \quad (3.4.76)$$

Por otra parte, sustituyendo las expansiones (3.4.69) y (3.4.70) en (3.4.64), y desarrollando

$$\begin{aligned} -i \omega_n \hat{U} + i u_0 k \hat{U} + v k^2 \hat{U} = & \hat{U} \left\{ \frac{1}{2} \omega_n^2 \Delta t + u_0 k^2 \Delta x \left(\frac{1}{2} + \frac{i}{6} k \Delta x \right) + \right. \\ & \left. \frac{1}{24} v k^4 \Delta x^2 + O(\Delta t^2, \Delta t \Delta x^2) \right\} \end{aligned} \quad (3.4.77)$$

Sustituyendo la serie perturbatoria para ω_n (3.4.76) en la parte izquierda de (3.4.77), se tiene:

$$\begin{aligned} -i \omega_n \hat{U} + i u_0 k \hat{U} + v k^2 \hat{U} = & \hat{U} \left\{ \frac{1}{2} u_0^2 k^2 \Delta t + \frac{1}{2} u_0 k^2 \Delta x + \frac{i}{2} u_0^3 k^3 \Delta t^2 + \right. \\ & \left. \frac{i}{2} u_0^2 k^3 \Delta t \Delta x + \frac{i}{6} u_0 k^3 \Delta x^2 + \frac{1}{24} v k^4 \Delta x^2 + O[(\Delta t + \Delta x)^3] \right\} \end{aligned} \quad (3.4.78)$$

Haciendo uso en la relación anterior de la antitransformada de Fourier $\mathfrak{F}^{-1}[(ip)^n F(p)] = f^{(n)}(x)$, y desarrollando, se tiene



$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} + u_0 \frac{\partial U}{\partial x} - v \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = & -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} u_0 (u_0 \Delta t - \Delta x) - \\ & \frac{1}{2} \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} u_0 \left(u_0^2 \Delta t^2 + u_0 \Delta t - \Delta x + \frac{1}{2} \Delta x^2 \right) + \\ & \frac{1}{24} v \Delta x^2 \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} + O[(\Delta x + \Delta t)^3] \end{aligned} \quad (3.4.79)$$

La ecuación (3.4.79) es conocida como la ecuación *modificada*, y tiene la particularidad de que los términos de truncado del lado izquierdo sólo están en función de derivadas espaciales (Cunge, *et al.*, 1980).

El grado de convergencia del esquema en diferencias (3.4.60) se tiene al momento $U \rightarrow u$ para $\Delta x, \Delta t \rightarrow 0$. Este resultado se puede observar al comparar las ecuaciones (3.4.60) y (3.4.79). Por otra parte, se debe cumplir la condición de estabilidad numérica $|\rho_k| \leq 1$ (3.4.67). Además, el esquema en diferencias (3.4.60) tendrá problemas de difusión numérica a medida que se tomen valores más grandes de Δx o Δt , como se puede observar en la ecuación modificada (3.4.79).

Para ahondar en la aplicación del método de Fourier, se presenta a continuación un análisis de propagación de perturbaciones para las ecuaciones de flujo para aguas someras unidimensionales despreciando los términos convectivos y de fricción. Entonces, sean la ecuación de conservación de masa y cantidad de movimiento siguientes:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + H \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (3.4.80)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + g \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \quad (3.4.81)$$

donde $h = h(x, t)$, $u = u(x, t)$ son el tirante y la velocidad, respectivamente; $x \in (-\infty, \infty)$ es el dominio espacial de solución; $t \in (0, t_f]$ el tiempo; t_f el tiempo final; H el tirante promedio del canal de marea y g la aceleración de la gravedad. El problema (3.4.80)-(3.4.81) está sujeto a la condiciones iniciales $h(x, 0) = h_0(x)$ y $u(x, 0) = u_0(x)$.

Aplicando una representación de Fourier de la variables dependientes en el sistema (3.4.80)-(3.4.81)

$$h = \hat{h}(k) e^{-i(kx - \omega t)} \quad (3.4.82)$$

$$u = \hat{u}(k) e^{-i(kx - \omega t)} \quad (3.4.83)$$



Sustituyendo las ecuaciones (3.4.82)-(3.4.83) en (3.4.80)-(3.4.81), y agrupando

$$\begin{bmatrix} -\omega & Hk \\ gk & -\omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{h} \\ \hat{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.4.84)$$

el sistema matricial anterior tiene una solución diferente a la trivial, si y sólo si el determinante de coeficientes es nulo, entonces:

$$\omega = \pm \sqrt{gH} k \quad (3.4.85)$$

Sustituyendo la ecuación anterior en (3.4.82) – (3.4.83), y teniendo en cuenta el principio de superposición, entonces:

$$h_1 = \hat{h}_1(k) e^{-ik(x-\sqrt{gH}t)} \quad (3.4.86)$$

$$h_2 = \hat{h}_2(k) e^{-ik(x+\sqrt{gH}t)} \quad (3.4.87)$$

$$u_1 = \hat{u}_1(k) e^{-ik(x-\sqrt{gH}t)} \quad (3.4.88)$$

$$u_2 = \hat{u}_2(k) e^{-ik(x+\sqrt{gH}t)} \quad (3.4.89)$$

Aplicando el principio de superposición en la condición inicial, y aplicando a ésta la transformada de Fourier:

$$\hat{h}_1(k) + \hat{h}_2(k) = \hat{h}^0(k) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} h(x,0) e^{-ikx} dx \quad (3.4.90)$$

$$\hat{u}_1(k) + \hat{u}_2(k) = \hat{u}^0(k) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x,0) e^{-ikx} dx \quad (3.4.91)$$

En esta parte se analizarán dos diferentes condiciones iniciales para el problema (3.4.80)-(3.4.81). Sea una condición inicial sin movimiento, ni variación del nivel $h(x,0)=0$ y $u(x,0)=0$. Sustituyendo esta condición inicial en las ecuaciones (3.4.90) y (3.4.91), se tiene:

$$-\sqrt{gH} k \hat{h}_1(k) + Hk \hat{u}_1(k) = 0 \quad (3.4.92)$$

$$\sqrt{gH} k \hat{h}_2(k) + Hk \hat{u}_2(k) = 0 \quad (3.4.93)$$

o, también:

$$\hat{u}_1(k) = \sqrt{\frac{g}{H}} \hat{h}_1(k) \quad (3.4.94)$$

$$\hat{u}_2(k) = -\sqrt{\frac{g}{H}} \hat{h}_2(k) \quad (3.4.95)$$

Sustituyendo las ecuaciones (3.4.94) y (3.4.95) en (3.4.90) y (3.4.91)



$$\hat{h}_1(k) + \hat{h}_2(k) = \hat{h}^0(k) \quad (3.4.96)$$

$$\hat{h}_1(k) - \hat{h}_2(k) = \sqrt{\frac{H}{g}} \hat{u}^0(k) \quad (3.4.97)$$

de forma similar, se obtiene que la solución para la condición inicial propuesta es:

$$\hat{h}(k) = \frac{1}{2} \left(\hat{h}_0(k) \pm \sqrt{\frac{H}{g}} \hat{u}^0(k) \right) \quad (3.4.98)$$

$$\hat{u}(k) = \frac{1}{2} \left(\hat{u}^0(k) \pm \sqrt{\frac{g}{H}} \hat{h}_0(k) \right) \quad (3.4.99)$$

Por otra parte, se propone analizar el comportamiento del sistema (3.4.80)-(3.4.81) cuando es sometido a una condición inicial de variación de nivel representado por una función de tipo gaussiana. Entonces:

$$h(x,0) = h_0 e^{-(x/L)^2} \quad (3.4.100)$$

en forma complementaria la condición inicial para el flujo se considera como $u(x,0) = u_0(x)$. Procediendo a aplicar la transformada discreta de Fourier en condición inicial de nivel (3.4.100), se tiene

$$\begin{aligned} \hat{h}^0(k) &= \frac{h_0}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x/L)^2} e^{-ikx} dx \\ &= \frac{h_0 L}{2\sqrt{2}} e^{-\frac{L^2 k^2}{4}} \operatorname{erf} \left[\frac{x}{L} + \frac{1}{2} ikL \right] \Big|_{-\infty}^{\infty} \\ &= \frac{h_0 L}{2} e^{-\frac{L^2 k^2}{4}} \end{aligned} \quad (3.4.101)$$

Sustituyendo (3.4.101) en (3.4.90)

$$\hat{h}(k,t) = \frac{h_0 L}{\sqrt{2}} e^{-\frac{L^2 k^2}{4}} \left[e^{ik(x+\sqrt{gH}t)} + e^{ik(x-\sqrt{gH}t)} \right] \quad (3.4.102)$$

La solución del sistema (3.4.80)-(3.4.81), sometido a la condición inicial de variación de nivel gaussiana, pero sin flujo, se obtiene sustituyendo (3.4.102) y (3.4.99) en (3.4.82) y (3.4.83)

$$h(x,t) = \frac{h_0}{2} \left[e^{-\left(\frac{x+\sqrt{gH}t}{L}\right)^2} + e^{-\left(\frac{x-\sqrt{gH}t}{L}\right)^2} \right] \quad (3.4.103)$$



$$u(x, t) = \sqrt{\frac{g}{H}} \frac{h_0}{2} \left[e^{-\left(\frac{x+\sqrt{gH}t}{L}\right)^2} - e^{-\left(\frac{x-\sqrt{gH}t}{L}\right)^2} \right] \quad (3.4.104)$$

Finalmente para determinar la solución del sistema (3.4.80) y (3.4.81), se puede determinar si en consecuencia para cualquier número de onda esta solución es estable, para lo cual se puede analizar la relación de dispersión:

$$\begin{aligned} \rho_{a_1} &= \frac{u_1(x, t + \Delta t)}{u_1(x, t)} = \frac{h_1(x, t + \Delta t)}{h_1(x, t)} \\ &= e^{i\sqrt{gH} \Delta t k} = e^{iC_r k \Delta x} \end{aligned} \quad (3.4.105)$$

$$\begin{aligned} \rho_{a_2} &= \frac{u_2(x, t + \Delta t)}{u_2(x, t)} = \frac{h_2(x, t + \Delta t)}{h_2(x, t)} \\ &= e^{-i\sqrt{gH} \Delta t k} = e^{-iC_r k \Delta x} \end{aligned} \quad (3.4.106)$$

donde $C_r = \sqrt{gH} \Delta t / \Delta x$, que en este caso se tomará como el número de Courant, que difiere un poco al utilizado durante el análisis de la ecuación de Bourgues.

Aplicando la condición de estabilidad $|\rho_a| \leq 1$, se tiene que $|\rho_{a_1}| = 1$ y $|\rho_{a_2}| = 1$, lo que indica que este sistema es neutralmente estable. Finalmente se determina que la condición de propagación puede obtenerse de los argumentos de (3.4.105) y (3.4.106), de donde:

$$\arg(\rho_{a_1}) = C_r k \Delta x \quad (3.4.107)$$

$$\arg(\rho_{a_2}) = \begin{cases} -C_r k \Delta x \\ \frac{2}{3} \pi + C_r k \Delta x \end{cases} \quad (3.4.108)$$

Proponiendo una discretización en diferencias finitas del sistema de ecuaciones (3.4.80) y (3.4.81) de forma que:

$$\frac{\tilde{H}_j^{n+1} - \tilde{H}_j^n}{\Delta t} + H_0 \frac{\tilde{U}_{j+1}^{n+1} - \tilde{U}_{j-1}^{n+1}}{2\Delta x} = 0 \quad (3.4.109)$$

$$\frac{\tilde{U}_j^{n+1} - \tilde{U}_j^n}{\Delta t} + g \frac{\tilde{H}_{j+1}^{n+1} - \tilde{H}_{j-1}^{n+1}}{2\Delta x} = 0 \quad (3.4.110)$$

en donde H_0 es el tirante medio del canal al que se le puso el subíndice cero para distinguirlo de la variables de discretización de nivel.

El sistema (3.4.109) y (3.4.110) queda sujeto a la condición inicial $\tilde{H}_j^0 = f(j \Delta x)$, $\tilde{U}_j^0 = f(j \Delta x)$. Sean $H = H(x, t)$, $U = U(x, t)$ funciones con suficiente grado de



continuidad, de tal manera que $H = H(j \Delta x, n \Delta t) \equiv H_j^n = \tilde{H}_j^n$,
 $U = U(j \Delta x, n \Delta t) \equiv U_j^n = \tilde{U}_j^n$, $\forall j, n$.

Se aplica el método de Fourier al esquema numérico (3.4.109) y (3.4.110), proponiendo la aproximación en serie de Fourier para las variables dependientes

$$H_{pj}^n = \hat{H}(k) \rho_k^n e^{ikj\Delta x} \quad (3.4.111)$$

$$U_{pj}^n = \hat{U}(k) \rho_k^n e^{ikj\Delta x} \quad (3.4.112)$$

donde $\rho_k^n \equiv e^{-i\omega_n(k)n\Delta t}$ es el factor de amplificación del k -ésimo modo de Fourier.

Sustituyendo (3.4.111) y (3.4.112) en (3.4.109) y (3.4.110), y desarrollando, se tiene

$$\begin{bmatrix} (\rho_k - 1) & i \frac{\Delta t}{\Delta x} \rho_k H_0 \text{sen}(k \Delta x) \\ i \frac{\Delta t}{\Delta x} \rho_k g \text{sen}(k \Delta x) & (\rho_k - 1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{H} \\ \hat{U} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.4.113)$$

Existe una solución del sistema (3.4.113) diferente a la trivial, si y sólo si el determinante de coeficientes es nulo. Resolviendo el determinante de coeficientes e igualando a cero y despejando el factor de amplificación, se tiene la siguiente relación de dispersión numérica:

$$\rho_k = \frac{1 \pm i C_r \text{sen}(k \Delta x)}{1 + C_r^2 \text{sen}^2(k \Delta x)} \quad (3.4.114)$$

Aplicando la condición de estabilidad $|\rho_k| \leq 1$ en (3.4.114)

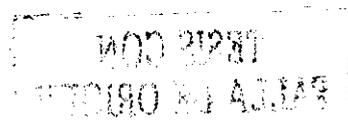
$$|\rho_k| = \frac{1}{1 + C_r^2 \text{sen}^2(k \Delta x)} \leq 1 \quad (3.4.115)$$

en donde se muestra que este esquema es incondicionalmente estable.

En la relación de dispersión (3.4.114) se puede aplicar una expansión en serie de Taylor, de forma que

$$\rho_k = 1 \pm i C_r k \Delta x - \frac{3}{2} C_r^2 k^2 \Delta x^2 \mp i \left[\frac{3}{2} C_r^3 + \frac{1}{6} C_r \right] k^3 \Delta x^3 + O(k^4 \Delta x^4) \quad (3.4.116)$$

Por otra parte, dado que $\rho_k \equiv e^{-i\omega_n(k)\Delta t}$, entonces se puede igualar la serie (3.4.69) con (3.4.116), de donde se tiene





$$\omega_n - \frac{1}{2} i \omega_n^2 \Delta t - \frac{1}{6} \omega_n^3 \Delta t^2 + O(\omega_n^4 \Delta t^3) = \mp \sqrt{g H_0} k - \frac{3}{2} i g H_0 k^2 \Delta t \pm \frac{3}{2} (g H_0)^{3/2} \pm \frac{1}{6} \sqrt{g H_0} k^3 \Delta x^3 + O\left(k^4 \frac{\Delta x^4}{\Delta t}\right) \quad (3.4.117)$$

Dado que la solución perturbatoria para ω_n es del tipo asumido en la ecuación (3.4.72), entonces, igualando los términos de igual orden de aproximación, se tiene:

$$\omega_{00} = \pm \sqrt{g H} k \quad (3.4.118)$$

$$\omega_{10} = -i g H k^2 \quad (3.4.119)$$

$$\omega_{20} = \pm \frac{4}{3} (g H)^{3/2} k^3 \quad (3.4.120)$$

$$\omega_{02} = \mp \frac{1}{6} \sqrt{g H} k^3 \quad (3.4.121)$$

Por tanto, la ecuación para evaluar la frecuencia numérica ω_n se puede escribir de la forma siguiente

$$\omega_n = \mp \sqrt{g H_0} k \left[1 \pm i \sqrt{g H_0} k \Delta t - \frac{4}{3} g H_0 k^2 \Delta t^2 - \frac{1}{6} k^2 \Delta x^2 + O(\Delta x + \Delta t)^3 \right] \quad (3.4.122)$$

Por otra parte, sea la ecuación de conservación de masa en el espacio de Fourier

$$\frac{(\rho_k - 1)}{\Delta t} \hat{H} + i \rho_k \frac{H_0}{\Delta x} \text{sen}(k \Delta x) \hat{U} = 0 \quad (3.4.123)$$

Sustituyendo (3.4.69) y una expansión en serie de Taylor en la ecuación anterior, y agrupando, se tiene:

$$\begin{aligned} -i \omega \hat{H} + i H_0 k \hat{U} &= \frac{1}{2} \omega^2 \Delta t \hat{H} - \frac{1}{6} i H_0 k^3 \Delta x^2 \hat{U} - \omega H_0 k \Delta t \hat{U} - \\ &\frac{1}{6} i \omega^3 \Delta t^2 \hat{H} + \frac{1}{2} i \omega^2 H_0 k \Delta t^2 \hat{U} + \dots \end{aligned} \quad (3.4.124)$$

Finalmente, sustituyendo la expresión perturbatoria para ω_n ecuación (3.4.122) en la relación (3.4.124), y desarrollando, se tiene

$$\begin{aligned} -i \omega \hat{H} + i H_0 k \hat{U} &= \Delta t \left[\frac{1}{2} g H_0 \hat{H} + H_0 \sqrt{g H_0} \hat{U} \right] k^2 \pm \Delta t^2 \left[\frac{7}{6} i (g H_0)^{3/2} \hat{H} + \frac{3}{2} i g H_0^2 \hat{U} \right] + \\ &\frac{1}{6} i H_0 k^3 \Delta x^2 \hat{U} + O(\Delta x + \Delta t)^3 \end{aligned} \quad (3.4.125)$$



Haciendo uso en la relación anterior de la antitransformada de Fourier $\mathfrak{F}^{-1}[(ip)^n F(p)] = f^{(n)}(x)$, y desarrollando, se tiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial t} + H_0 \frac{\partial U}{\partial x} = & -\frac{1}{2} \Delta t \sqrt{g H_0} \left[\sqrt{g H_0} \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + H_0 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right] \mp \Delta t^2 \frac{7}{6} (g H_0)^{3/2} \frac{\partial^3 H}{\partial x^3} - \\ & \frac{H_0}{12} \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} [2\Delta x^2 \pm 18\Delta t^2 g H_0] + O(\Delta x + \Delta t)^3 \end{aligned} \quad (3.4.126)$$

Y realizando un análisis similar para la ecuación de cantidad de movimiento:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} + g \frac{\partial H}{\partial x} = & -\frac{1}{2} \Delta t \sqrt{g H_0} \left[\sqrt{g H_0} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + g \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \right] \mp \Delta t^2 \frac{7}{6} (g H_0)^{3/2} \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} - \\ & \frac{g}{12} \frac{\partial^3 H}{\partial x^3} [2\Delta x^2 \pm 18\Delta t^2 g H_0] + O(\Delta x + \Delta t)^3 \end{aligned} \quad (3.4.127)$$

El grado de convergencia del esquema en diferencias (3.4.109)-(3.4.110) se tiene al momento en que $\mathbf{U} \rightarrow \mathbf{u}$ para $\Delta x, \Delta t \rightarrow 0$. Este resultado se puede observar comparando las ecuaciones (3.4.109)-(3.4.110) y (3.4.80)-(3.4.81).

En los capítulos subsecuentes se llevará a cabo la aplicación del método de Fourier para determinar la condición de estabilidad y mediante un análisis de consistencia, se evaluará el grado de convergencia del esquema numérico de discretización, tanto para una discretización en diferencias como para una formulación en elemento finito.





CAPÍTULO 4

DETERMINACIÓN DE PROPIEDADES DE PROPAGACIÓN DE SISTEMAS CONTINUOS

4.1. Ecuaciones de Saint-Venant conservativas

En este capítulo se propone llevar a cabo el estudio la propagación de perturbaciones de las ecuaciones continuas de flujo a superficie libre en una dimensión de Saint-Venant en las versiones que se definieron en el subcapítulo 2.3. Primeramente se analizará la versión conservativa en su versión integrodiferencial (definición 2.1). Posteriormente, la versión diferencial conservativa (definición 2.2) y, finalmente, la versión no conservativa (definición 2.3), utilizando la metodología desarrollada en el capítulo 3.

4.1.1. Construcción del sistema perturbado de las ecuaciones de Saint-Venant, versión integrodiferencial

Para la construcción del sistema perturbado de las ecuaciones de Saint-Venant en su versión integrodiferencial, se toma como punto de partida el sistema de ecuaciones de la definición 2.1, que se enuncia como:



Ecuación de conservación de masa

$$\mathcal{L}(A, Q; x, t) = \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (2.3.46)$$

Ecuación de cantidad de movimiento

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(A, Q; x, t) = \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{Q^2}{A} \right] + g \frac{\partial I_1(A; x, t)}{\partial x} - \\ g I_2(A; x, t) + g A [S_f(A, Q; x, t) - S_b] = 0 \end{aligned} \quad (2.3.47)$$

El estudio de las propiedades de propagación del sistema (2.3.46) y (2.3.47) se logra introduciendo pequeñas perturbaciones de forma tal que

$$A = \bar{A} + a \quad ; \quad \|\bar{A}\| \gg \|a\| \quad (4.1.1)$$

$$Q = \bar{Q} + q \quad ; \quad \|\bar{Q}\| \gg \|q\| \quad (4.1.2)$$

donde \bar{A} y \bar{Q} son soluciones de referencia del sistema (2.3.46) y (2.3.47), y a y q son pequeñas perturbaciones que actúan sobre las variables de referencia (lámina 3.2); entonces, sustituyendo las ecuaciones (4.1.1) y (4.1.2) en (2.3.46) y (2.3.47), se obtiene el sistema de ecuaciones perturbadas de Saint-Venant en su versión conservativa integrodiferencial, siguiente

$$\frac{\partial(\bar{A} + a)}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{Q} + q)}{\partial x} = 0 \quad (4.1.3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\bar{Q} + q)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{(\bar{Q} + q)^2}{\bar{A} + a} \right] + g \frac{\partial I_1(\bar{A} + a; x, t)}{\partial x} - \\ g I_2(\bar{A} + a; x, t) + g (\bar{A} + a) [S_f(\bar{A} + a, \bar{Q} + q; x, t) - S_b] = 0 \end{aligned} \quad (4.1.4)$$

Desarrollando la ecuación de conservación de masa de perturbada (4.1.3), la cual es lineal, entonces

$$\frac{\partial \bar{A}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{Q}}{\partial x} + \frac{\partial a}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \quad (4.1.5)$$

Debido a que la ecuación perturbada de cantidad de movimiento (4.1.4) es no lineal, se propone llevar a cabo un análisis término a término. Cabe hacer mención de que en esta parte del documento el análisis término a término se llevará a cabo con detalle, debido a que este desarrollo se utilizará en los capítulos subsecuentes. Entonces para el primer término se tiene:

$$\frac{\partial(\bar{Q} + q)}{\partial t} = \frac{\partial \bar{Q}}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial t} \quad (4.1.6)$$



Segundo término:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{(\bar{Q} + q)^2}{\bar{A} + a} \right] = \frac{\partial}{\partial x} \left[(\bar{Q} + q)^2 (\bar{A} + a)^{-1} \right] \quad (4.1.7)$$

En la relación anterior se cumple que $\|\bar{A}\| \gg \|a\|$ (ecuación 4.1.1). Dada esta propiedad entre la magnitud de las variables de referencia y de perturbación, se puede aplicar, para el término que es operado por la derivada espacial, una expansión binomial (Nayfeh, 1980) del tipo siguiente:

$$(\bar{Q} + q)^2 (\bar{A} + a)^{-1} = \frac{\bar{Q}^2}{\bar{A}} + 2 \frac{\bar{Q}}{\bar{A}} q - \frac{\bar{Q}^2}{\bar{A}^2} a + O\left[(\|a\| + \|q\|)^2\right] \quad (4.1.8)$$

Y sustituyendo la expansión binomial (4.1.8) en (4.1.7):

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{(\bar{Q} + q)^2}{\bar{A} + a} \right] = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\bar{Q}^2}{\bar{A}} \right] + 2 \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\bar{Q}}{\bar{A}} q \right] - \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\bar{Q}^2}{\bar{A}^2} a \right] + O\left[(\|a\| + \|q\|)^2\right] \quad (4.1.9)$$

Tercer término:

En el caso de la integral $I_1(A; x, t)$, que tiene una dependencia con respecto a la variable de área, para determinar su influencia en la propagación de perturbaciones el tercer término se analizará con base a su definición de la integral 2.3.18 (subcapítulo 2.3):

$$g \frac{\partial I_1(\bar{A} + a; x, t)}{\partial x} = g \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{y(\bar{A} + a; x, t)} [y(\bar{A} + a; x, t) - \eta] \delta(x, \eta) d\eta \quad (4.1.10)$$

Como se puede observar en lado derecho de esta ecuación, el término que contiene la dependencia paramétrica con respecto al área es el nivel de la superficie libre del agua $y(A; x, t)$, y para determinar su influencia en la propagación de perturbaciones se propone aplicar una expansión en serie de Fréchet-Taylor (ecuación 3.3.6) de forma que

$$\begin{aligned} y(\bar{A} + a; x, t) &= y(\bar{A}; x, t) + a(x, t) \left. \frac{\partial y(A; x, t)}{\partial A} \right|_{\bar{A}} + O(\|a^2\|) \\ &= \bar{y} + a \bar{y}_A + O(\|a^2\|) \end{aligned} \quad (4.1.11)$$

Con el fin de tener una notación más compacta de la ecuación (4.1.11) se considerará la siguiente notación: $y(\bar{A} + a; x, t) \equiv \bar{y}$ y $\left. \frac{\partial y}{\partial A} \right|_{\bar{A}} \equiv \bar{y}_A$. Como paso subsecuente, sustituyendo la expansión en serie de Fréchet-Taylor (4.1.11) en (4.1.10), y desarrollando



$$\begin{aligned}
 \int_0^{y(\bar{A}+a; x, t)} [y(\bar{A}+a; x, t) - \eta] \delta(x, \eta) d\eta &= \int_0^{\bar{y} + a\bar{y}_A + O(\|a^2\|)} [\bar{y} + a\bar{y}_A + O(\|a^2\|) - \eta] \delta(x, \eta) d\eta \\
 &= \int_0^{\bar{y}} [\bar{y} - \eta] \delta(x, \eta) d\eta + \int_0^{\bar{y}} a\bar{y}_A \delta(x, \eta) d\eta + \\
 &\quad \int_{\bar{y}}^{\bar{y} + a\bar{y}_A + O(\|a^2\|)} [\bar{y} + a\bar{y}_A + O(\|a^2\|) - \eta] \delta(x, \eta) d\eta + O(\|a^2\|)
 \end{aligned} \tag{4.1.12}$$

De las dos primeras integrales del lado derecho de (4.1.12) se obtienen las propiedades siguientes con respecto a las variables de referencia:

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\bar{y}} [\bar{y} - \eta] \delta(x, \eta) d\eta &= I_1(\bar{A}; x, t) \quad (\text{ecuación 2.3.18}) \\
 &\equiv \bar{I}_1
 \end{aligned} \tag{4.1.13}$$

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\bar{y}} a\bar{y}_A \delta(x, \eta) d\eta &= a\bar{y}_A \Big|_A \int_0^{\bar{y}} \delta(x, \eta) d\eta \quad (\text{ecuación 2.3.22}) \\
 &= a\bar{A}\bar{y}_A \Big|_A \\
 &= a\frac{\bar{A}}{\bar{B}}
 \end{aligned} \tag{4.1.14}$$

En la integral (4.1.14) se evaluó el término $\bar{A}\bar{y}_A \Big|_A = \bar{A}(\partial y / \partial A)_{\bar{A}} \Big|_A = \bar{A} / B(\bar{A}) = \bar{D}$, donde \bar{D} es el tirante hidráulico.

Para el desarrollo de la tercera integral del lado derecho de (4.1.12), se puede introducir la descomposición siguiente:

$$\int_{\bar{y}}^{\bar{y} + a\bar{y}_A + O(\|a^2\|)} [\bar{y} + a\bar{y}_A + O(\|a^2\|) - \eta] \delta(x, \eta) d\eta = \int_{\bar{y}}^{\bar{y} + a\bar{y}_A + O(\|a^2\|)} [\bar{y} - \eta] \delta(x, \eta) d\eta + \int_{\bar{y}}^{\bar{y} + a\bar{y}_A + O(\|a^2\|)} a\bar{y}_A \delta(x, \eta) d\eta \tag{4.1.15}$$

Dado que $\eta \in [\bar{y}, \bar{y} + a\bar{y}_A + O(\|a^2\|)]$ en la integral que aparece en (4.1.15), y a su vez $a\bar{y}_A + O(\|a^2\|) \ll \bar{y}$ (ecuación 4.1.1), es posible emplear una expansión en serie de Taylor para η y $\delta(\eta)$:

$$\eta = \bar{y} + (\eta - \bar{y}) = \bar{y} + O(a) \tag{4.1.16}$$



$$\begin{aligned}\delta(\eta) &= \delta(\bar{y}) + (\eta - \bar{y}) \left. \frac{\partial \delta}{\partial \eta} \right|_{(\eta=\bar{y})} + O(\|a\|^2) \\ &= \bar{B} + (\eta - \bar{y}) \left. \frac{\partial \delta}{\partial \eta} \right|_{(\eta=\bar{y})} + O(\|a\|^2)\end{aligned}\quad (4.1.17)$$

Aplicando el resultado de las expansiones (4.1.16) y (4.1.17) en la primera integral (4.1.15), ésta se puede escribir de la forma siguiente:

$$\begin{aligned}\int_{\bar{y}}^{\bar{y}+a\bar{y}_A+O(\|a\|^2)} [\bar{y} - \eta] \delta(x, \eta) d\eta &= \int_{\bar{y}}^{\bar{y}+a\bar{y}_A+O(\|a\|^2)} (\bar{y} - \eta) \left[\bar{B} + (\eta - \bar{y}) \left. \frac{\partial \delta}{\partial \eta} \right|_{\bar{y}} + O(\|a\|^2) \right] d\eta \\ &= -\bar{B} \frac{(\bar{y} - \eta)^2}{2} \Big|_{\bar{y}}^{\bar{y}+a\bar{y}_A+O(\|a\|^2)} + O(\|a\|^3) \\ &= -\bar{B} \frac{a^2 \bar{y}_A^2}{2} + O(\|a\|^3) = O(\|a\|^2)\end{aligned}\quad (4.1.18)$$

Realizando un análisis similar para la segunda integral de (4.1.15), se tiene que es de orden $O(\|a\|^2)$, lo cual implica que la integral (4.1.15) en su conjunto es de $O(\|a\|^2)$.

En conclusión, el tercer término de la ecuación de cantidad de movimiento (4.1.10) se pueden expresar del modo siguiente, sustituyendo los resultados obtenidos anteriormente, (4.1.13), (4.1.14) y (4.1.18):

$$g \frac{\partial I_1(\bar{A} + a; x, t)}{\partial x} = g \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial x} + g \frac{\partial}{\partial x} \left(a \frac{\bar{A}}{\bar{B}} \right) + O(\|a\|^2) \quad (4.1.19)$$

Cuarto Término:

De forma similar al tercer término, la integral $I_2(A; x, t)$ tiene una dependencia paramétrica con relación a la variable del área, y para determinar su influencia en la propagación de perturbaciones se puede utilizar la integral (2.3.19), de forma que

$$g I_2(\bar{A} + a; x, t) = \int_0^{y(\bar{A}+a; x, t)} [y(\bar{A} + a; x, t) - \eta] \left[\frac{\partial \delta}{\partial x} \right]_{y=y_0} d\eta \quad (4.1.20)$$

Para la evaluación de la dependencia paramétrica en la ecuación anterior se puede utilizar la expansión en serie de Fréchet-Taylor (4.1.11) para $y(\bar{A} + a; x, t)$, y realizando un desarrollo similar a como se llevó a cabo en el tercer término, se tiene que



$$g I_2(\bar{A} + a; x, t) = g I_2 + g \frac{a}{\bar{B}} \frac{\partial \bar{A}}{\partial x} + O(\|a\|^2) \quad (4.1.21)$$

Quinto término:

$$\begin{aligned} g(\bar{A} + a) \frac{\partial z}{\partial x} &= g \bar{A} \frac{\partial z}{\partial x} + g a \frac{\partial z}{\partial x} \\ &= -g \bar{A} S_b - g a S_b \end{aligned} \quad (4.1.22)$$

En este caso, la variación espacial de la plantilla del canal se evalúa con el valor de la pendiente del fondo $S_b = -\partial z / \partial x$.

Sexto término:

El término de fricción $S_f(A, Q; x, t)$ tiene una dependencia paramétrica con respecto al área A y al gasto Q . Por tanto, para determinar o evaluar la propagación de las propiedades de perturbación, se hace necesario aplicar una expansión en serie de Fréchet-Taylor en la forma siguiente:

$$\begin{aligned} S_f(\bar{Q} + q, \bar{A} + a; x, t) &= S_f(\bar{Q}, \bar{A}; x, t) + a(x, t) \frac{\partial S_f(Q, A; x, t)}{\partial A} \Big|_{\bar{A}} + \\ &+ q(x, t) \frac{\partial S_f(Q, A; x, t)}{\partial Q} \Big|_{\bar{Q}} + O(\|a\| + \|q\|)^2 \end{aligned} \quad (4.1.23)$$

Para trabajar con una notación más compacta de la ecuación (4.1.23), y utilizando la ecuación de fricción dimensionalmente homogénea de Chezy-Manning (2.3.45), se propone definir las siguiente notación:

$$\begin{aligned} \bar{S}_f &\equiv S_f(\bar{Q}, \bar{A}; x, t) \\ &= \alpha \left(\frac{K_s}{R(\bar{A}; x, t)} \right)^{1/3} \frac{|\bar{Q}| \bar{Q}}{g R(\bar{A}; x, t) \bar{A}^2} \end{aligned} \quad (4.1.24)$$

$$\begin{aligned} \bar{S}_{f_A} &\equiv \frac{\partial S_f(A, Q; x, t)}{\partial A} \Big|_{\bar{A}} \\ &= -2 \alpha \left(\frac{K_s}{R(\bar{A}; x, t)} \right)^{1/3} \frac{|\bar{Q}| \bar{Q}}{g R(\bar{A}; x, t) \bar{A}^2} \left(\frac{1}{\bar{A}} + \frac{2}{3 R(\bar{A}; x, t)} \frac{\partial R(\bar{A}; x, t)}{\partial A} \Big|_{\bar{A}} \right) \end{aligned} \quad (4.1.25)$$

$$\begin{aligned} \bar{S}_{f_Q} &\equiv \frac{\partial S_f(A, Q; x, t)}{\partial Q} \Big|_{\bar{Q}} \\ &= 2 \alpha \left(\frac{K_s}{R(\bar{A}; x, t)} \right)^{1/3} \frac{|\bar{Q}|}{g R(\bar{A}; x, t) \bar{A}^2} \end{aligned} \quad (4.1.26)$$



En el caso de utilizar una ecuación diferente para evaluar el término de fricción $S_f(A, Q; x, t)$, los términos que se involucran en las variables de simplificación \bar{S}_{f_A} y \bar{S}_{f_Q} serán diferentes y, en consecuencia, el resultado que se tenga del estudio de propagación de perturbaciones también lo será.

Entonces, la expansión en serie de Fréchet-Taylor (4.1.26) en forma compacta, es:

$$S_f(\bar{Q} + q, \bar{A} + a; x, t) = \bar{S}_f + a\bar{S}_{f_A} + q\bar{S}_{f_Q} + O\left[(\|a\| + \|q\|)^2\right] \quad (4.1.27)$$

Finalmente, la ecuación de perturbada de cantidad de movimiento en su versión integrodiferencial se construye sustituyendo las ecuaciones (4.1.6), (4.1.9), (4.1.19), (4.1.21), (4.1.22) y (4.1.27) en (4.1.4) con lo cual se obtiene:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \bar{Q}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\bar{Q}^2}{A} \right) + g \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial x} - g \bar{I}_2 + g \bar{A} (\bar{S}_f - S_b) + \frac{\partial q}{\partial t} + 2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\bar{Q}}{A} q \right) - \\ & \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\bar{Q}^2}{A^2} a \right) + g \frac{\bar{A}}{B} \frac{\partial a}{\partial x} - g a \frac{\bar{A}}{B^2} \frac{\partial \bar{B}}{\partial x} + g \frac{\bar{a}}{B} \frac{\partial \bar{A}}{\partial x} + g a (\bar{S}_f - S_b) + \\ & g \bar{A} (a \bar{S}_{f_A} + q \bar{S}_{f_Q}) + O\left[(\|a\| + \|q\|)^2\right] = 0 \end{aligned} \quad (4.1.28)$$

Los primeros términos de las ecuaciones perturbadas (4.1.5) y (4.1.28), que dependen exclusivamente de los términos de referencia, se anulan, dado que \bar{A} y \bar{Q} por definición satisfacen las ecuaciones de conservación de masa (2.3.46) y cantidad de movimiento (2.3.47), esto es:

$$\frac{\partial \bar{A}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{Q}}{\partial x} = 0 \quad (4.1.29)$$

y

$$\frac{\partial \bar{Q}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\bar{Q}^2}{A} \right) + g \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial x} - g \bar{I}_2 + g \bar{A} (\bar{S}_f - S_b) = 0 \quad (4.1.30)$$

Los términos restantes de las ecuaciones (4.1.5) y (4.1.28), haciendo uso de las ecuaciones de referencia (4.1.29) y (4.1.30), son los que describen el comportamiento de las perturbaciones. A las expresiones resultantes se les denominará ecuaciones de perturbación, las cuales resultan ser:

$$\frac{\partial a}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \quad (4.1.31)$$



$$\begin{aligned} \frac{\partial q}{\partial t} + 2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\bar{Q}}{\bar{A}} q \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\bar{Q}^2}{\bar{A}^2} a \right) + g \frac{\bar{A}}{\bar{B}} \frac{\partial a}{\partial x} - g a \frac{\bar{A}}{\bar{B}^2} \frac{\partial \bar{B}}{\partial x} + \\ g \frac{\bar{a}}{\bar{B}} \frac{\partial \bar{A}}{\partial x} + g a (\bar{S}_f - S_b) + g \bar{A} (a \bar{S}_{f_A} + q \bar{S}_{f_Q}) + O[\|a\| + \|q\|]^2 = 0 \end{aligned} \quad (4.1.32)$$

4.1.2. Construcción del sistema perturbado de las ecuaciones de Saint-Venant versión diferencial

El análisis de la propagación de perturbaciones en las ecuaciones de Saint-Venant en su versión diferencial, se llevará a cabo con un procedimiento similar al utilizado para la versión integrodiferencial, haciendo notar que la principal diferencia consiste en la manera de trabajar el término de presión, tal como se menciona en la elaboración de la definición 2.2 (ver subcapítulo 2.3). La definición 2.2 indica que se tiene el siguiente sistema de ecuaciones:

Ecuación de conservación de masa

$$\mathcal{L}(A, Q; x, t) = \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (2.3.52)$$

Ecuación de cantidad de movimiento

$$\mathcal{M}(A, Q; x, t) = \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{Q^2}{A} \right] + g A \frac{\partial h(A; x, t)}{\partial x} + g A S_f(A, Q; x, t) = 0 \quad (2.3.53)$$

donde las variables que intervienen en las ecuaciones (2.3.52) y (2.3.53) han sido previamente definidas.

El sistema de ecuaciones (2.3.52) y (2.3.53) constituye un problema bien planteado de valor inicial y de valores en la frontera, cuando está sujeto a las condiciones iniciales $A(x,0) = A_0(x)$ y $Q(x,0) = Q_0(x)$ y a las condiciones de frontera de flujo subcrítico y supercrítico, dadas por las ecuaciones (2.3.48)-(2.3.51).

Las propiedades de propagación del sistema (2.3.52) y (2.3.53) se determinan introduciendo pequeñas perturbaciones sobre las variables dependientes: $A = \bar{A} + a$, $Q = \bar{Q} + q$ (ecuaciones 4.1.1 y 4.1.2), donde \bar{A} y \bar{Q} son soluciones de referencia, y a y q son pequeñas perturbaciones. Sustituyendo las ecuaciones (4.1.1) y (4.1.2) en (2.3.52) y (2.3.53), se obtiene:

$$\frac{\partial(\bar{A} + a)}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{Q} + q)}{\partial x} = 0 \quad (4.1.33)$$



$$\frac{\partial(\bar{Q}+q)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{(\bar{Q}+q)^2}{A+a} \right] + g(\bar{A}+a) \frac{\partial h(\bar{A}+a; x, t)}{\partial x} + g(\bar{A}+a) S_f(\bar{A}+a, \bar{Q}+q; x, t) = 0 \quad (4.1.34)$$

Realizando una comparación entre el sistema de perturbación de las ecuaciones integrales (4.1.3) y (4.1.4) con el sistema de perturbación (4.1.33) y (4.1.34), se puede observar que la única diferencia es la forma como se evalúa el término de presión, como era de esperarse, ya que esta diferencia se hizo manifiesta en el subcapítulo 2.3.

El desarrollo de la ecuación de perturbada de masa (4.1.33) se puede expresar como se presenta en la ecuación (4.1.5), y para la ecuación de cantidad de movimiento (4.1.34) se puede proceder a realizar un desarrollo término a término. Pero en vista de que los dos primeros términos y el término de fricción son similares a los que se tuvieron en la ecuación (4.1.4), sólo se realizará un desarrollo para el tercer término, el cual se puede evaluar llevando a cabo un expansión en serie de Fréchet-Taylor para la elevación de la superficie libre del agua $h(\bar{A}+a; x, t)$, la cual depende del área de forma que

$$h(\bar{A}+a; x, t) = h(\bar{A}; x, t) + a(x, t) \left. \frac{\partial h(A; x, t)}{\partial A} \right|_{\bar{A}} + O(\|a\|^2) \quad (4.1.35)$$

Para tener una notación más compacta de la expansión (4.1.35), se introduce la siguiente notación:

$$\bar{h} \equiv h(\bar{A}; x, t) \quad (4.1.36)$$

$$\bar{h}_A \equiv \left. \frac{\partial h(A; x, t)}{\partial A} \right|_{\bar{A}} \quad (4.1.37)$$

Sustituyendo la expansión de Fréchet-Taylor (4.1.35) en el tercer término de la ecuación de cantidad de movimiento perturbada (4.1.34), y haciendo uso de (4.1.36) y (4.1.37), se tiene:

$$g(\bar{A}+a) \frac{\partial h(\bar{A}+a; x, t)}{\partial x} = g\bar{A} \frac{\partial \bar{h}}{\partial x} + ga \frac{\partial \bar{h}}{\partial x} + g\bar{A} \frac{\partial (a\bar{h}_A)}{\partial x} + O(\|a\|^2) \quad (4.1.38)$$

Finalmente, la ecuación de perturbada de cantidad de movimiento (4.1.34) en su versión diferencial se construye sustituyendo las ecuaciones (4.1.6), (4.1.9), (4.1.27) y (4.1.38) de forma que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{Q}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\bar{Q}^2}{A} \right) + g\bar{A} \frac{\partial \bar{h}}{\partial x} + g\bar{A} \bar{S}_f + \frac{\partial q}{\partial t} + 2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\bar{Q}}{A} q \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\bar{Q}^2}{A^2} a \right) + \\ g\bar{A} \frac{\partial}{\partial x} (\bar{h}_A a) + ga \frac{\partial \bar{h}}{\partial x} + ga \bar{S}_f + g\bar{A} a \bar{S}_{f_A} + g\bar{A} q \bar{S}_{f_Q} + O(\|a\| + \|q\|)^2 = 0 \end{aligned} \quad (4.1.39)$$



Dado que \bar{A} y \bar{Q} representan soluciones de referencia:

$$\frac{\partial \bar{A}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{Q}}{\partial x} = 0 \quad (4.1.40)$$

$$\frac{\partial \bar{Q}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\bar{Q}^2}{\bar{A}} \right) + g \bar{A} \frac{\partial \bar{h}}{\partial x} + g \bar{A} \bar{S}_f = 0 \quad (4.1.41)$$

Tomando en cuenta que \bar{h} es la elevación de la superficie libre del agua desde un nivel de referencia, la cual incluye la elevación de la plantilla del canal y el tirante de forma que $\bar{h} = z + \bar{y}$, y recordando que la pendiente de la plantilla es la variación de la elevación de la plantilla en la horizontal ($\partial z / \partial x = -S_b$), entonces la ecuación de referencia de cantidad de movimiento (4.1.41) se puede escribir como:

$$\frac{\partial \bar{Q}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\bar{Q}^2}{\bar{A}} \right) + g \bar{A} \frac{\partial \bar{y}}{\partial x} + g \bar{A} (\bar{S}_f - S_b) = 0 \quad (4.1.42)$$

Los términos de (4.1.5) y (4.1.39) adicionales a los de referencia, son los que gobiernan el comportamiento de las perturbaciones esto es:

$$\frac{\partial a}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \quad (4.1.43)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial q}{\partial t} + 2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\bar{Q}}{\bar{A}} q \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\bar{Q}^2}{\bar{A}^2} a \right) + g \bar{A} \frac{\partial}{\partial x} (\bar{h}_{AA} a) + g a \left(\frac{\partial \bar{y}}{\partial x} + \bar{S}_f - S_b + \bar{A} \bar{S}_{fA} \right) + \\ g \bar{A} q \bar{S}_{f_0} + O\left[(\|a\| + \|q\|)^2 \right] = 0 \end{aligned} \quad (4.1.44)$$

Una forma alterna para expresar la ecuación de perturbación de cantidad de movimiento anterior se puede obtener desarrollando los términos que contienen los valores de referencia de nivel de la superficie libre del agua $\partial(\bar{h}_{AA})/\partial x$ y $\partial \bar{y} / \partial x$. Entonces:

$$\begin{aligned} \frac{\partial q}{\partial t} + 2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\bar{Q}}{\bar{A}} q \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\bar{Q}^2}{\bar{A}^2} a \right) + g \frac{\bar{A}}{\bar{B}} \frac{\partial a}{\partial x} - g a \frac{\bar{A}}{\bar{B}^2} \frac{\partial \bar{B}}{\partial x} + \\ g \frac{\bar{a}}{\bar{B}} \frac{\partial \bar{A}}{\partial x} + g a (\bar{S}_f - S_b) + g \bar{A} (a \bar{S}_{fA} + q \bar{S}_{f_0}) + O\left[(\|a\| + \|q\|)^2 \right] = 0 \end{aligned} \quad (4.1.45)$$

En el caso de llevar a cabo una comparación entre el sistema de ecuaciones de referencia de Saint-Venant en su versión integral (4.1.29) y (4.1.30), con la versión diferencial (4.1.43) y (4.1.44), se puede observar que persiste la diferencia en la forma como se puede evaluar el término de presión, lo cual era



de esperarse, ya que la condición de referencia se respeta al momento de aplicar el desarrollo de las ecuaciones de perturbación en cualquier versión.

Por otra parte, las ecuaciones de perturbación en la versión integrodiferencial (4.1.31) y (4.1.32), en comparación con la versión diferencial (4.1.43) y (4.1.45), son iguales. Esto implica que para el estudio de la propagación de perturbaciones es indistinto de qué versión de las ecuaciones de perturbación se haga uso, ya sea integrodiferencial o diferencial. Entonces, para los estudios de estabilidad subsecuentes sólo se hará uso de las ecuaciones en su versión diferencial y esto se debe a que la condición de flujo de referencia en el estudio de las perturbaciones debe tener un comportamiento suave (subcapítulo 3.2.2). Ello se cumple en forma general en la versión diferencial debido a que no se tienen variaciones bruscas del ancho de la superficie libre, lo cual indica que no tiene importancia qué tipo de versión conservativa de las ecuaciones de Saint-Venant se esté haciendo uso (Cunge *et al.*, 1980).

4.1.3. Análisis de escalas múltiples y localización

Para evaluar si cada uno de los términos de las ecuaciones de referencia (4.1.40) y (4.1.42) son de igual magnitud, se propone llevar a cabo un escalamiento. Entonces, sea (x_o, t_o) un punto de referencia arbitrario en el espacio de solución Ω , alejado de la frontera $\partial\Omega$, en donde se cumple que:

$$A_o = \bar{A}(x_o, t_o) \quad (4.1.46)$$

$$Q_o = \bar{Q}(x_o, t_o) \quad (4.1.47)$$

$$y_o = y[\bar{A}(x_o, t_o); x_o, t_o] \quad (4.1.48)$$

$$S_o = S_b(x_o) \quad (4.1.49)$$

$$S_{f_o} = \bar{S}_f[\bar{A}(x_o, t_o), \bar{Q}(x_o, t_o); x_o, t_o] \quad (4.1.50)$$

Además, sean \mathcal{L} y \mathcal{T} respectivamente las escalas de longitud y tiempo asociadas con las soluciones de referencia. Entonces, definanse las siguientes variables adimensionales de espacio y tiempo:

$$X = \frac{x - x_o}{\mathcal{L}} \quad (4.1.51)$$

$$I = \frac{t - t_o}{\mathcal{T}} \quad (4.1.52)$$

donde se supone que para desplazamientos $x - x_o$ y $t - t_o$ conmensurables respectivamente con \mathcal{L} y \mathcal{T} , X y I son de $O(1)$.

Adicionalmente, sea $U_o = Q_o/A_o$; entonces se supondrá que \mathcal{T} representa una escala advectiva de tiempo, esto es:



$$\bar{\tau} = \frac{\mathcal{L}}{U_o} \quad (4.1.53)$$

Introduciendo entonces los siguientes escalamientos:

$$\bar{A} = A_o A^*(X, I) \quad (4.1.54)$$

$$\bar{Q} = Q_o Q^*(X, I) \quad (4.1.55)$$

$$\bar{y} = y_o y^* [A^*(X, I); X, I] \quad (4.1.56)$$

$$S_b = S_o S_b^*(X) \quad (4.1.57)$$

$$\bar{S}_f = S_{f_o} S_f^* [A^*(X, I), Q^*(X, I); X, I] \quad (4.1.58)$$

Sustituyendo (4.1.51)-(4.1.55) en la ecuación de conservación de masa (4.1.40) de referencia, se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{A_o}{\bar{\tau}} \frac{\partial A^*}{\partial T} + \frac{Q_o}{\mathcal{L}} \frac{\partial Q^*}{\partial X} &= 0 \\ \Rightarrow \\ \frac{\mathcal{L}}{\bar{\tau}} \frac{\partial A^*}{\partial T} + \frac{Q_o}{A_o} \frac{\partial Q^*}{\partial X} &= 0 \\ \frac{\partial A^*}{\partial T} + \frac{\partial Q^*}{\partial X} &= 0 \end{aligned} \quad (4.1.59)$$

La ecuación (4.1.59) indica que cada uno de los términos de la ecuación de conservación de masa son de igual magnitud, y por tanto el principio de continuidad se mantiene después de aplicar el escalamiento.

En el caso del escalamiento de la ecuación de cantidad de movimiento de referencia (4.1.42) se aplican los escalamientos (4.1.51) - (4.1.58), de forma que se tiene:

$$\frac{Q_o}{\bar{\tau}} \frac{\partial Q^*}{\partial T} + \frac{Q_o^2}{A_o \mathcal{L}} \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{Q^{*2}}{A^*} \right) + g \frac{A_o y_o}{\mathcal{L}} A^* \frac{\partial y^*}{\partial X} + g A_o A^* (S_{f_o} S_f^* - S_o S_b^*) = 0 \quad (4.1.60)$$

o, también:

$$\frac{\partial Q^*}{\partial T} + \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{Q^{*2}}{A^*} \right) + g \frac{y_o}{U_o^2} A^* \frac{\partial y^*}{\partial X} + g \frac{\mathcal{L}}{U_o^2} A^* (S_{f_o} S_f^* - S_o S_b^*) = 0 \quad (4.1.61)$$

En la expresión (4.1.61) el tercer término se puede escribir como $g y_o / U_o^2 = F_r^{-2} = O(1)$, donde F_r , es el número de Froude. Por otra parte, para el término de fricción se puede plantear el siguiente escalamiento:



$$\begin{aligned} g \frac{\mathcal{L}}{U_o^2} S_{f_o} &= g \frac{\mathcal{L}}{U_o^2} \alpha \left(\frac{K_s}{R_o} \right)^{1/3} \frac{|U_o| U_o}{g R_o} \\ &= \alpha \left(\frac{K_s}{R_o} \right)^{1/3} \frac{\mathcal{L} \operatorname{sgn}(U_o)}{R_o} \gg 1 \end{aligned} \quad (4.1.62)$$

La validez en la magnitud de la ecuación (4.1.62) se evalúa aplicando diferentes condiciones de régimen de flujo, y para comprobar lo anterior se presenta el siguiente ejemplo de aplicación a un cauce natural.

Ejemplo: Sea un cauce natural con los siguientes valores del régimen de flujo: gasto $Q_o = 300 \text{ m}^3/\text{s}$, rugosidad de fondo $K_s = 0.3 \text{ m}$, velocidad media $U_o = 0.25 \text{ m/s}$, radio hidráulico (que en este caso se le considera con una sección muy ancha, que es común en un cauce de baja pendiente) $R_o \approx y_o = 1.56 \text{ m}$, y la longitud del cauce $L = 50000 \text{ m}$; entonces, la magnitud

se tiene en la ecuación (4.1.62) es $\alpha \left(\frac{K_s}{R_o} \right)^{1/3} \frac{\mathcal{L} \operatorname{sgn}(U_o)}{R_o} = 2416 \gg 1$

Por tanto, se puede definir que la ecuación (4.1.62) se escala de la forma siguiente:

$$g \frac{\mathcal{L}}{U_o^2} S_{f_o} = O\left(\frac{1}{\delta}\right) \quad \text{donde } \delta \ll 1 \quad (4.1.63)$$

Al considerar (4.1.63) en (4.1.61), se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q^*}{\partial T} + \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{Q^{*2}}{A^*} \right) + F_r^{-2} A^* \frac{\partial y^*}{\partial X} + \frac{g \mathcal{L}}{U_o^2} S_{f_o} A^* S_f^* - \frac{g \mathcal{L}}{U_o^2} S_o A^* S_b^* &= 0 \\ O(1) \quad O(1) \quad O(1) \quad O(1/\delta) \quad O(?) \end{aligned} \quad (4.1.64)$$

Evidentemente, el término de fricción es dominante en la ecuación adimensional de cantidad de movimiento (4.1.64) y sólo podría ser balanceado por el término que involucra a la pendiente de fondo. Por lo tanto, se concluye que:

$$g \frac{\mathcal{L}}{U_o^2} S_o = O\left(\frac{1}{\delta}\right) \quad (4.1.65)$$

Entonces, para que todos los términos en (4.1.64) sean de la misma magnitud, debe cumplirse que la diferencia entre el término de fricción y la pendiente del fondo debe ser $(S_{f_o} - S_o) = O(\delta)$, aunque ambos términos por separado tengan una magnitud muy grande (ecuaciones 4.1.63 y 4.1.65).



Demostración: En el caso de existir un flujo uniforme ideal, se cumple en forma exacta que $(S_{f_0} - S_0) = 0$, lo cual no llega a suceder en la naturaleza, ya que sólo puede darse en un flujo que tienda a la normalización. Entonces $(S_{f_0} - S_0) = O(\varepsilon) \neq 0$, lo cual indica que para cualquier condición de flujo se presenta la condición de $S_{f_0} \rightarrow S_0$.

Como parte complementaria al argumento anterior, es práctica común considerar que la pendiente de fricción tiende a la pendiente del canal al uniformizarse el flujo, lo cual es correcto aunque esta inferencia se extrapola hasta afirmarse que para un régimen transitorio se cuenta con un flujo uniforme ideal $(S_{f_0} - S_0) = 0$, como condición de referencia, lo cual se puede ver en los trabajos de Cunge, *et al.*; 1980, Abbott y Basco, 1989 y García, 1994. La consideración anterior produce un efecto tal que la ecuación (4.1.65) pierde información con respecto a las fuerzas de cuerpo y de fricción, lo cual provoca que al momento de realizarse un análisis de propagación de perturbaciones se manejan las ecuaciones de referencia y de perturbación en forma incompleta, de donde se puede concluir que utilizar cualquier versión de las ecuaciones de Saint-Venant, considerando $(S_{f_0} - S_0) = 0$, es una formulación errónea ya que no se representa adecuadamente el comportamiento del flujo.

Sean Λ_x y Λ_t las escalas de longitud y tiempo aplicadas en las perturbaciones. Entonces, para escalar el sistema de ecuaciones de perturbación (4.1.43) y (4.1.45), se propone definir las siguientes variables adimensionales de posición y tiempo:

$$\zeta = \frac{x - x_0}{\Lambda_x} \quad (4.1.66)$$

$$\tau = \frac{t - t_0}{\Lambda_t} \quad (4.1.67)$$

donde se supone que para desplazamientos $x - x_0$ y $t - t_0$ conmensurables respectivamente con Λ_x y Λ_t , ζ y τ son de $O(1)$. Además, se supondrá que Λ_t es una escala advectiva de tiempo, de donde:

$$\Lambda_t = \frac{\Lambda_x}{U_0} \quad (4.1.68)$$

Ahora se supondrá que las escalas asociadas con las perturbaciones son mucho más pequeñas que las asociadas con las soluciones de referencia, esto es

$$\varepsilon = \frac{\Lambda_x}{\mathcal{L}} = \frac{\Lambda_t}{\mathcal{T}} \ll 1 \quad (4.1.69)$$



Asimismo en forma consistente con la supuesta pequeñez de las perturbaciones, se introducirán las siguientes escalamientos para las variables dependientes de perturbación:

$$a = \varepsilon A_0 a^*(\zeta, \tau) \quad (4.1.70)$$

$$q = \varepsilon Q_0 q^*(\zeta, \tau) \quad (4.1.71)$$

Como puede observarse en las ecuaciones (4.1.54), (4.1.55), (4.1.70) y (4.1.71) se ha manejado la hipótesis de separación de escalas, ya que las soluciones de referencia sólo dependen de las “variables lentas” X y T , mientras que las perturbaciones sólo dependen de las “variables rápidas” ζ y τ .

Sustituyendo las escalas de perturbación (4.1.70) y (4.1.71) en la ecuación de perturbación de conservación de masa (4.1.43), y desarrollado tenemos que:

$$\frac{\partial a^*}{\partial \tau} + \frac{\partial q^*}{\partial \zeta} = 0 \quad (4.1.72)$$

Como resultado, se observa que la ecuación de continuidad de perturbación es invariante al escalamiento, por lo que los términos presentes en ella tienen la misma magnitud.

Antes de proceder al escalamiento de la ecuación de perturbación de cantidad de movimiento (4.1.45), se propone expandir las derivadas espaciales que involucran los términos convectivos de forma que:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\bar{Q}}{\bar{A}} q \right) = \frac{\bar{Q}}{\bar{A}} \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{q}{\bar{A}} \frac{\partial \bar{Q}}{\partial x} - \frac{\bar{Q} q}{\bar{A}^2} \frac{\partial \bar{A}}{\partial x} \quad (4.1.73)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\bar{Q}^2}{\bar{A}^2} a \right) = \frac{\bar{Q}^2}{\bar{A}^2} \frac{\partial a}{\partial x} + 2 \frac{\bar{Q} a}{\bar{A}^2} \frac{\partial \bar{Q}}{\partial x} - 2 \frac{\bar{Q}^2 a}{\bar{A}^3} \frac{\partial \bar{A}}{\partial x} \quad (4.1.74)$$

Entonces, sustituyendo las ecuaciones (4.1.73) y (4.1.74) en la ecuación de cantidad de movimiento (4.1.45), y agrupando

$$\begin{aligned} & \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{2}{\bar{A}} \left(q - \frac{\bar{Q}}{\bar{A}} a \right) \left(\frac{\partial \bar{Q}}{\partial x} - \frac{\bar{Q}}{\bar{A}} \frac{\partial \bar{A}}{\partial x} \right) + 2 \frac{\bar{Q}}{\bar{A}} \frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\bar{Q}^2}{\bar{A}^2} \frac{\partial a}{\partial x} + g \bar{A} \bar{h}_A \frac{\partial a}{\partial x} + \\ & g a \left(\bar{A} \frac{\partial \bar{h}_A}{\partial x} + \frac{\partial \bar{y}}{\partial x} + \bar{S}_f - S_b + \bar{A} \bar{S}_{f_A} \right) + g \bar{A} q \bar{S}_{f_0} + O\left[(\|a\| + \|q\|)^2 \right] = 0 \end{aligned} \quad (4.1.75)$$

Se procede ahora al escalamiento de la ecuación de conservación de cantidad de movimiento de perturbación (4.1.75), incorporando los escalamientos (4.1.52)-(4.1.58), (4.1.70) y (4.1.71), y agrupando



$$\begin{aligned} & \frac{\varepsilon Q_o}{\Lambda_t} \frac{\partial q^*}{\partial \tau} + \frac{2\varepsilon Q_o^2}{\mathcal{L} A_o} \frac{1}{A^*} \left(q^* - \frac{Q^*}{A^*} a^* \right) \left(\frac{\partial Q^*}{\partial X} - \frac{Q^*}{A^*} \frac{\partial A^*}{\partial X} \right) + \frac{\varepsilon Q_o^2}{\Lambda_x A_o} \left(2 \frac{Q^*}{A^*} \frac{\partial q^*}{\partial \zeta} - \frac{Q^{*2}}{A^{*2}} \frac{\partial a^*}{\partial \zeta} \right) + \\ & g \frac{\varepsilon A_o h_o}{\Lambda_x} A^* h_A^* \frac{\partial a^*}{\partial \zeta} + g \varepsilon A_o a^* \left(\frac{h_o}{\mathcal{L}} A^* \frac{\partial h_A^*}{\partial X} + \frac{y_o}{\mathcal{L}} \frac{\partial y^*}{\partial X} + S_{f_o} S_f^* - S_o S_b^* + S_{f_o} A^* S_{f_A}^* \right) + \quad (4.1.76) \\ & g \varepsilon A_o S_{f_o} g A^* q^* S_{f_o}^* + O(\varepsilon^2) = 0 \end{aligned}$$

o, también

$$\begin{aligned} & \frac{\partial q^*}{\partial \tau} + 2\varepsilon \frac{1}{A^*} \left(q^* - \frac{Q^*}{A^*} a^* \right) \left(\frac{\partial Q^*}{\partial X} - \frac{Q^*}{A^*} \frac{\partial A^*}{\partial X} \right) + \left(2 \frac{Q^*}{A^*} \frac{\partial q^*}{\partial \zeta} - \frac{Q^{*2}}{A^{*2}} \frac{\partial a^*}{\partial \zeta} \right) + \quad (4.1.77) \\ & g \frac{h_o}{U_o^2} A^* h_A^* \frac{\partial a^*}{\partial \zeta} + g \varepsilon \frac{h_o}{U_o^2} \left(A^* \frac{\partial h_A^*}{\partial X} + \frac{y_o}{h_o} \frac{\partial y^*}{\partial X} \right) + g \frac{\varepsilon \mathcal{L}}{U_o^2} a^* (S_{f_o} S_f^* - S_o S_b^*) + \\ & g \frac{\varepsilon \mathcal{L}}{U_o^2} S_{f_o} A^* [a^* S_{f_A}^* + q^* S_{f_o}^*] + O(\varepsilon) = 0 \end{aligned}$$

En la expresión anterior se puede observar que las magnitudes de algunos términos se escalan en función de las siguientes magnitudes

$$\frac{y_o}{h_o} = O(1) \quad (4.1.78)$$

$$g \frac{h_o}{U_o^2} = F_r^{-2} = O(1) \quad (4.1.79)$$

Nuevamente, para escalar el término de fricción, se hace uso de la expresión (4.1.62). Para el término que involucra la pendiente del cauce por medio de la ecuación (4.1.63), considerando que en la diferencia de la pendiente de fricción y de la plantilla del canal en un flujo con tendencia a la normalización se cumple que $(S_{f_o} - S_o) = O(\delta)$, entonces el término de fricción se puede evaluar como:

$$g \frac{\varepsilon}{\delta} (S_{f_o} - S_o) = O(\varepsilon) \quad (4.1.80)$$

Sustituyendo los escalamientos anteriores (4.1.78)-(4.1.80) en (4.1.77), se obtiene:

$$\frac{\partial q^*}{\partial \tau} + 2 \frac{Q^*}{A^*} \frac{\partial q^*}{\partial \zeta} - \frac{Q^{*2}}{A^{*2}} \frac{\partial a^*}{\partial \zeta} + g \frac{h_o}{U_o^2} A^* h_A^* \frac{\partial a^*}{\partial \zeta} + g \frac{\varepsilon}{\delta} S_{f_o} [a^* A^* S_{f_A}^* + q^* A^* S_{f_o}^*] + O(\varepsilon) = 0 \quad (4.1.81)$$

En la ecuación (4.1.81) se tienen términos de orden $O(1)$ y $O(\varepsilon)$, que dependen de las variables de referencia y de perturbación. Entonces, para conocer la influencia que tienen cada uno de los términos y variables sobre la propagación de las perturbaciones, se propone llevar a cabo un análisis local como se presenta a continuación.



Tomando en cuenta la hipótesis de separación de escalas (4.1.46) – (4.1.50), se puede escribir que:

$$A(x, t) = A(x_o, t_o) + (x - x_o) \frac{\partial A}{\partial x} \Big|_{(x_o, t_o)} + (t - t_o) \frac{\partial A}{\partial t} \Big|_{(x_o, t_o)} + O\left\{[(x - x_o) + (t - t_o)]^2\right\} \quad (4.1.82)$$

$$a(x, t) = a(x_o, t_o) + (x - x_o) \frac{\partial a}{\partial x} \Big|_{(x_o, t_o)} + (t - t_o) \frac{\partial a}{\partial t} \Big|_{(x_o, t_o)} + O\left\{[(x - x_o) + (t - t_o)]^2\right\} \quad (4.1.83)$$

Aplicando los escalamientos (4.1.51), (4.1.52), (4.1.54) y (4.1.70) en (4.1.82) y en (4.1.83), se tiene:

$$A_o A^* = A_o A^* + \frac{(x - x_o)}{\mathcal{L}} A_o \frac{\partial A^*}{\partial X} + \frac{(t - t_o)}{\mathcal{T}} A_o \frac{\partial A^*}{\partial T} + O\left(A_o \left[\frac{(x - x_o)}{\mathcal{L}} + \frac{(t - t_o)}{\mathcal{T}}\right]^2\right) \quad (4.1.84)$$

$$\varepsilon A_o a^* = \varepsilon A_o a^* + \frac{(x - x_o)}{\Lambda_x} \varepsilon A_o \frac{\partial a^*}{\partial \zeta} + \frac{(t - t_o)}{\Lambda_t} \varepsilon A_o \frac{\partial a^*}{\partial \tau} + O\left(\varepsilon A_o \left[\frac{(x - x_o)}{\Lambda_x} + \frac{(t - t_o)}{\Lambda_t}\right]^2\right) \quad (4.1.85)$$

Además, considerando desplazamientos conmensurables con Λ_x y Λ_t , de forma que:

$$\zeta = \frac{x - x_o}{\Lambda_x} = O(1) \quad (4.1.86)$$

$$\tau = \frac{t - t_o}{\Lambda_t} = O(1) \quad (4.1.87)$$

Entonces, aplicando las magnitudes de los escalamientos anteriores en las ecuaciones (4.1.84) y (4.1.85), y desarrollando se tiene que:

$$A^* = 1 + O(\varepsilon) \quad (4.1.88)$$

$$a^* = 1 + O(1) \quad (4.1.89)$$

Esto indica que al localizar el análisis de escalas sobre un punto arbitrario, las variables de referencia tienen un comportamiento suave o de una magnitud casi estacionaria y, por otro lado, que las variables de perturbación tienen un comportamiento rápido o de una gran variabilidad. En forma coloquial, el resultado anterior de localización indica que las variables de referencia pueden ser localizadas, mientras que las variables de perturbación no pueden localizadas.

Lo anterior se puede ejemplificar en el caso de un flujo con tendencia a la normalización, donde el nivel de la superficie libre del agua tiene una variación suave dentro del dominio. Pero en el caso de tenerse una análisis localizado



esta variación es casi imperceptible, a nivel de las variables de referencia. En cambio, al localizar el análisis en un punto arbitrario, se puede observar que el nivel de la superficie libre del agua tiene una variación importante a escala de las variables de perturbación. Entonces, las variables de perturbación permiten evaluar el comportamiento de esta variabilidad, tanto en forma temporal como espacial.

Para completar el análisis de localización sobre el sistema de ecuaciones (4.1.72) y (4.1.81), considerando el resultado de (4.1.88) y (4.1.89), se tiene

$$\frac{\partial a^*}{\partial \tau} + \frac{\partial q^*}{\partial \zeta} = 0 \quad (4.1.90)$$

$$\frac{\partial q^*}{\partial \tau} + 2U_o \frac{\partial q^*}{\partial \zeta} - U_o^2 \frac{\partial a^*}{\partial \zeta} + g \frac{h_o}{U_o^2} A_o h_{A_o} \frac{\partial a^*}{\partial \zeta} + g \frac{\varepsilon}{\delta} S_{f_o} A_o [a^* S_{f_{A_o}} + q^* S_{f_{Q_o}}] + O(\varepsilon) = 0 \quad (4.1.91)$$

buscando una solución perturbatoria para las variables del sistema (4.1.90) y (4.1.91) (Kevorkian y Cole, 1996)

$$a^* = a_o^* + \varepsilon a_1^* + O(\varepsilon^2) \quad (4.1.92)$$

$$q^* = q_o^* + \varepsilon a_1^* + O(\varepsilon^2) \quad (4.1.93)$$

entonces, la solución del sistema de ecuaciones (4.1.90) y (4.1.91) para la condición cuando $\varepsilon \rightarrow 0^+$ se puede expresar como:

$$\frac{\partial a_o^*}{\partial \tau} + \frac{\partial q_o^*}{\partial \zeta} = 0 \quad (4.1.94)$$

$$\frac{\partial q_o^*}{\partial \tau} + 2U_o \frac{\partial q_o^*}{\partial \zeta} - U_o^2 \frac{\partial a_o^*}{\partial \zeta} + g \frac{h_o}{U_o^2} A_o h_{A_o} \frac{\partial a_o^*}{\partial \zeta} + g \frac{\varepsilon}{\delta} S_{f_o} A_o [a_o^* S_{f_{A_o}} + q_o^* S_{f_{Q_o}}] = 0 \quad (4.1.95)$$

Al resultado anterior de localización se puede agregar lo siguiente: si dentro del dominio de solución espacial $x \in [0, L]$, donde se ha definido el escalamiento de $L/L = O(1)$, y además al momento de escalar para las variables de perturbación la variable de longitud para la escala pequeña se delimita en $\zeta = -x_o/\Lambda_x = -x_o/\varepsilon L$ y $\zeta = (L - x_o)/\Lambda_x = (L - x_o)/\varepsilon L$ (ecuación 4.1.66), entonces, cuando se tiene una condición de $\varepsilon \rightarrow 0^+$, el rango de variación de la escala longitudinal a nivel local es $\zeta \in (-\infty, \infty)$.

Finalmente, se puede hacer notar que, después de aplicar los análisis de escalas y de localización al sistema de ecuaciones (4.1.31) y (4.1.45), ha sido posible transformar el problema de valor inicial no lineal con coeficientes variables (4.1.31) y (4.1.45) en un problema de valor inicial puro, lineal de coeficientes constantes (4.1.94) y (4.1.95), y este problema en su versión dimensional es:



$$\frac{\partial a}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \quad (4.1.96)$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} + 2U_o \frac{\partial q}{\partial x} - U_o^2 \frac{\partial a}{\partial x} + g \frac{h_o}{U_o^2} A_o h_{A_o} \frac{\partial a}{\partial x} + g A_o \left[a S_{f_{A_o}} + q S_{f_{Q_o}} \right] = 0 \quad (4.1.97)$$

Una forma alterna de trabajar los coeficientes de la ecuación de cantidad de movimiento (4.1.97) se logra utilizando las ecuaciones (4.1.25) y (4.1.26), de manera que se tienen los siguientes variables de simplificación:

$$\begin{aligned} A_o h_{A_o} &= A_o \left. \frac{dh}{dA} \right|_o \\ &= A_o \left. \frac{dy}{dA} \right|_o + A_o \left. \frac{dz}{dA} \right|_o \\ &= \frac{A_o}{B_o} = D_o \end{aligned} \quad (4.1.98)$$

$$\begin{aligned} g A_o S_{f_{A_o}} &= g A_o \left. \frac{dS_f}{dA} \right|_o \\ &= -2\alpha \left(\frac{K_s}{R_o} \right)^{1/3} \frac{|Q_o| Q_o}{R_o A_o} \left(\frac{1}{A_o} + \frac{2}{3R_o} \left. \frac{\partial R}{\partial A} \right|_o \right) = F_1 \end{aligned} \quad (4.1.99)$$

$$\begin{aligned} g A_o S_{f_{Q_o}} &= g A_o \left. \frac{dS_f}{dQ} \right|_o \\ &= 2\alpha \left(\frac{K_s}{R_o} \right)^{1/3} \frac{|\bar{Q}|}{R_o A_o} = F_2 \end{aligned} \quad (4.1.100)$$

Entonces una forma más compacta de la ecuación de cantidad de movimiento (4.1.98) se desarrolla haciendo uso de las variables de simplificación (4.1.98) - (4.1.100), como se muestra a continuación:

$$\frac{\partial q}{\partial t} + 2U_o \frac{\partial q}{\partial x} - U_o^2 (1 - F_r^{-2}) \frac{\partial a}{\partial x} + F_1 a + F_2 q = 0 \quad (4.1.101)$$

4.1.4. Análisis de estabilidad

El resultado del análisis de escalas y localización genera un problema de valor inicial puro, lineal y de coeficientes constantes (ecuaciones 4.1.96 y 4.1.101), el cual puede ser resuelto por medio del método de Fourier (subcapítulo 3.1.22),



que consiste en la aplicación de una expansión en serie de Fourier sobre las variables de perturbación donde:

$$a = \hat{a} e^{i(kx - \omega t)} \quad (4.1.102)$$

$$q = \hat{q} e^{i(kx - \omega t)} \quad (4.1.103)$$

y donde k es el número de onda y ω la frecuencia. Entonces, sustituyendo las expansiones (4.1.102) y (4.1.103) en el sistema (4.1.96) y (4.1.101), y desarrollando, se tiene que:

$$e^{i(kx - \omega t)} (-i\omega \hat{a} + ik\hat{q}) = 0 \quad (4.1.104)$$

$$e^{i(kx - \omega t)} \left[\hat{a} \left(-ikU_o^2(1 - F_r^{-2}) + F_1 \right) + \hat{q} \left(-i\omega + 2ikU_o + F_2 \right) \right] = 0 \quad (4.1.105)$$

El sistema anterior puede acomodarse en forma matricial, de forma que

$$e^{i(kx - \omega t)} \begin{bmatrix} \omega & -k \\ kU_o^2(1 - F_r^{-2}) + iF_1 & \omega - 2kU_o + iF_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.1.106)$$

El sistema de ecuaciones (4.1.106) tiene una solución diferente a la trivial si y sólo si el determinante de su matriz de coeficientes es nulo, entonces:

$$\omega(\omega - 2kU_o + iF_2) + k^2U_o^2(1 - F_r^{-2}) + ikF_1 = 0 \quad (4.1.107)$$

Para obtener la relación de dispersión, se resuelve la ecuación anterior para la frecuencia de forma que

$$\omega = kU_o - \frac{iF_2}{2} \pm \sqrt{k^2U_o^2F_r^{-2} - \frac{F_2^2}{4} - ik(U_oF_2 + F_1)} \quad (4.1.108)$$

Debido a que la frecuencia ω es una variable compleja, se puede separar en su parte real e imaginaria como $\omega = \omega_r + i\omega_i$. Entonces cada componente de Fourier se puede expresar de la forma siguiente:

$$a = \hat{a} e^{\omega_i t} e^{i(kx - \omega_r t)} \quad (4.1.109)$$

la relación anterior indica que a medida que aumenta el valor de $t > 0$, la perturbación se amplificará solamente si $\omega_i > 0$. Por otra parte, en el caso de tener $\omega_i = 0$, entonces la perturbación permanecerá de igual magnitud y en el caso de que $\omega_i < 0$ la perturbación decaerá en el tiempo. Esta condición de crecimiento o decrecimiento de la perturbación es similar a la que se definió como la condición de estabilidad práctica o crítica (subcapítulo 3.4.1).

Aplicando este criterio de estabilidad práctica a la relación de dispersión (4.1.108) se tiene

$$\omega_i = -\frac{F_2}{2} \pm \text{Im} \left[\sqrt{k^2U_o^2F_r^{-2} - \frac{F_2^2}{4} - ik(U_oF_2 + F_1)} \right] \leq 0 \quad (4.1.110)$$



Para contar con una forma más compacta del límite de estabilidad de (4.1.110), se extrae la parte imaginaria que está dentro del radical de la ecuación de forma que

$$-\frac{F_2}{2} \pm \operatorname{sgn}[-k(U_o F_2 + F_1)] 2^{-1/2} \cdot \left\{ \left[\left(k^2 U_o^2 F_r^{-2} - \frac{F_2^2}{4} \right)^2 + k^2 (U_o F_2 + F_1)^2 \right]^{1/2} - k^2 U_o^2 F_r^{-2} + \frac{F_2^2}{4} \right\}^{1/2} \leq 0 \quad (4.1.111)$$

La condición más desfavorable de la inecuación anterior se tiene para $\operatorname{sgn}[-k(U_o F_2 + F_1)] > 0$. Aplicando este criterio y desarrollando (4.1.111) se tiene que:

$$\left[\frac{U_o F_2 + F_1}{F_2 \sqrt{g D_o}} \right]^2 \leq 1 \quad (4.1.112)$$

La ecuación anterior es la condición límite de estabilidad más compacta del sistema de ecuaciones (4.1.96) y (4.1.101). Por otra parte, si se sustituyen las relaciones que involucran los efectos de los términos de fricción F_1 (ecuación 4.1.99) y F_2 (ecuación 4.1.100) en (4.1.112) se tiene:

$$\left[\frac{2\alpha \left(\frac{K_s}{R_o} \right)^{1/3} \frac{|\bar{Q}|}{R_o A_o} - 2U_o \alpha \left(\frac{K_s}{R_o} \right)^{1/3} \frac{Q_o |Q_o|}{R_o A_o} \left(\frac{1}{A_o} + \frac{2}{3R_o} \frac{\partial R}{\partial A} \right)}{2\alpha \left(\frac{K_s}{R_o} \right)^{1/3} \frac{|\bar{Q}|}{R_o A_o} \sqrt{g D_o}} \right]^2 \leq 1 \quad (4.1.113)$$

o, también

$$|V_e| \leq 1 \quad (4.1.114)$$

donde $V_e = \left| -\frac{2 A_o}{3 R_o} \frac{dR}{dA} \right| F_r$ es el número de Vedernikov (Samuels y Skeels, 1990; Ponce y Maisner, 1993).

Como resultado del presente estudio de propagación de perturbaciones, se tiene que el límite de la condición de estabilidad del sistema de ecuaciones de flujo a superficie libre de Saint-Venant, en su versión integral o diferencial, es $|V_e| \leq 1$.

Por otra parte, se ha citado en la bibliografía (Chow, 1959; Ponce y Simons, 1977) que cuando se tienen valores del número de Vedernikov mayores a la unidad, se presenta en la superficie del flujo una serie de perturbaciones a las cuales se ha denominado ondas rodantes (*rolling waves*).

Con el resultado del análisis de propagación de perturbaciones y el reporte de la visualización de las ondas rodantes, se puede concluir que el problema físico



de aparición de estas ondas es un problema de inestabilidad de flujo físico, el cual también es evaluado por las ecuaciones diferenciales de Saint-Venant, ya que tienen el mismo límite de estabilidad para $|V_e| \leq 1$.

4.2. Ecuaciones de Saint-Venant no conservativas

4.2.1. Construcción del sistema perturbado

Dentro del análisis de los sistemas continuos se procederá a realizar un análisis de propagación de perturbaciones del sistema de ecuaciones de Saint-Venant en su versión no conservativa (definición 2.3), el cual se puede desarrollar de la forma siguiente

Ecuación de conservación de masa:

$$\mathcal{L}(H,U;x,t) = B(H;x,t) \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [U A(H;x,t)] = 0 \quad (2.3.54)$$

Ecuación de cantidad de movimiento:

$$\mathcal{M}(H,U;x,t) = \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + g \frac{\partial H}{\partial x} + g \frac{\partial z_b(x)}{\partial x} + g S_f(H,U;x,t) = 0 \quad (2.3.55)$$

Las propiedades de propagación del sistema (2.3.54) y (2.3.55) se generan introduciendo una pequeña perturbación en la variables dependientes de la forma siguiente:

$$H = \bar{H} + h \quad ; \quad \|\bar{H}\| \gg \|h\| \quad (4.2.1)$$

$$U = \bar{U} + u \quad ; \quad \|\bar{U}\| \gg \|u\| \quad (4.2.2)$$

donde \bar{H} y \bar{U} son los valores de referencia, y h y u son pequeñas perturbaciones que actúan sobre las variables dependientes, sustituyendo las ecuaciones (4.2.1) y (4.2.2) en (2.3.54) y (2.3.55), obteniéndose el sistema de ecuaciones perturbadas de Saint-Venant en su versión no conservativa, como se muestra a continuación:

$$B(\bar{H} + h; x, t) \frac{\partial(\bar{H} + h)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [(\bar{U} + u) A(\bar{H} + h; x, t)] = 0 \quad (4.2.3)$$

$$\frac{\partial(\bar{U} + u)}{\partial t} + (\bar{U} + u) \frac{\partial(\bar{U} + u)}{\partial x} + g \frac{\partial(\bar{H} + h)}{\partial x} + g \frac{\partial z_b}{\partial x} + g S_f(\bar{H} + h, \bar{U} + u; x, t) = 0 \quad (4.2.4)$$

Para determinar la influencia de las variables de referencia y perturbación en las variables que tiene dependencia paramétrica en las ecuaciones (4.2.3) y



(4.2.4), se propone hacer uso de una expansión en serie de Frechét-Taylor (subcapítulo 3.3.2), de forma que

$$B(\bar{H} + h; x, t) = B(\bar{H}; x, t) + h(x, t) \frac{\partial B(H; x, t)}{\partial H} \Big|_{\bar{H}} + O(\|h\|^2) \quad (4.2.5)$$

$$A(\bar{H} + h; x, t) = A(\bar{H}; x, t) + h(x, t) \frac{\partial A(H; x, t)}{\partial H} \Big|_{\bar{H}} + O(\|h\|^2) \quad (4.2.6)$$

$$\begin{aligned} S_f(\bar{H} + h, \bar{U} + u; x, t) &= S_f(\bar{H}, \bar{U}; x, t) + h(x, t) \frac{\partial S_f(H, U; x, t)}{\partial H} \Big|_{\bar{H}} + \\ &+ u(x, t) \frac{\partial S_f(H, U; x, t)}{\partial U} \Big|_{\bar{U}} + O(\|h\| + \|u\|)^2 \end{aligned} \quad (4.2.7)$$

Con el fin de tener una notación más compacta de las expansiones (4.2.5)-(4.2.7), se considerará la siguiente notación:

$$\bar{B} \equiv B(\bar{H}; x, t) \quad (4.2.8)$$

$$\bar{B}_H \equiv \frac{\partial B(H; x, t)}{\partial H} \Big|_{\bar{H}} \quad (4.2.9)$$

$$\bar{A} \equiv A(\bar{H}; x, t) \quad (4.2.10)$$

$$\frac{\partial A(H; x, t)}{\partial H} \Big|_{\bar{H}} = B(\bar{H}; x, t) = \bar{B} \quad (4.2.11)$$

y para los términos que involucran la fricción se considera que

$$\begin{aligned} \bar{S}_f &\equiv S_f(\bar{H}, \bar{U}; x, t) \\ &= \alpha \left[\frac{K_s}{R(\bar{H}; x, t)} \right]^{1/3} \frac{|\bar{U}| \bar{U}}{g R(\bar{H}; x, t)} \end{aligned} \quad (4.2.12)$$

$$\begin{aligned} \bar{S}_{f_H} &\equiv \frac{\partial S_f(H, U; x, t)}{\partial H} \Big|_{\bar{H}} \\ &= -\frac{4}{3} \alpha \left[\frac{K_s}{R(\bar{H}; x, t)} \right]^{1/3} \frac{|\bar{U}| \bar{U}}{g R(\bar{H}; x, t)^2} \frac{\partial R(H; x, t)}{\partial H} \Big|_{\bar{H}} \end{aligned} \quad (4.2.13)$$



$$\begin{aligned}\bar{S}_{fv} &\equiv \frac{\partial S_f(H, U; x, t)}{\partial U} \Big|_{\bar{U}} \\ &= 2\alpha \left[\frac{K_s}{R(\bar{H}; x, t)} \right]^{1/3} \frac{|\bar{U}|}{gR(\bar{H}; x, t)}\end{aligned}\quad (4.2.14)$$

Sustituyendo (4.2.8)-(4.2.14) en las expansiones en serie de Fréchet-Taylor (4.2.5)-(4.2.7), se tiene

$$B(\bar{H} + h; x, t) = \bar{B} + h \bar{B}_H + O(\|h\|^2) \quad (4.2.15)$$

$$A(\bar{H} + h; x, t) = \bar{A} + h \bar{A}_H + O(\|h\|^2) \quad (4.2.16)$$

$$S_f(\bar{H} + h, \bar{U} + u; x, t) = \bar{S}_f + h \bar{S}_{fH} + u \bar{S}_{fv} + O(\|h\| + \|u\|)^2 \quad (4.2.17)$$

Una vez generadas las expansiones en serie de Fréchet-Taylor (ecuaciones 4.2.15 y 4.2.17), para continuar con el estudio de propagación de perturbaciones se sustituyen estas expansiones en la ecuación de perturbación de masa (4.2.3). Desarrollando, se tiene

$$\begin{aligned}\bar{B} \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\bar{U} \bar{A}) + \bar{B} \frac{\partial h}{\partial t} + \bar{U} \bar{B} \frac{\partial h}{\partial x} + \left(\bar{B}_H \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} + \bar{B} \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + \bar{U} \frac{\partial \bar{B}}{\partial x} \right) h + \\ \bar{A} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \bar{A}}{\partial x} u + O(\|h\|^2, \|h\| \|u\|) = 0\end{aligned}\quad (4.2.18)$$

Además, tomando en cuenta la expansión (4.2.17) en la ecuación de cantidad de movimiento (4.2.4)

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{U}}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + g \frac{\partial \bar{H}}{\partial x} + g \frac{\partial z}{\partial x} + g \bar{S}_f + \frac{\partial u}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + g \bar{S}_{fv} \right) u + g \frac{\partial h}{\partial x} + \\ g \bar{S}_{fH} h + O(\|h\| + \|u\|)^2 = 0\end{aligned}\quad (4.2.19)$$

Del sistema de ecuaciones perturbadas (4.2.18) y (4.2.19) se puede extraer la parte que satisface las ecuaciones de masa y cantidad de movimiento para la condición de referencia, de forma que

$$\bar{B} \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\bar{U} \bar{A}) = 0 \quad (4.2.20)$$

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + g \frac{\partial \bar{H}}{\partial x} + g(\bar{S}_f - S_b) = 0 \quad (4.2.21)$$

donde $S_b = -\partial z / \partial x$ es la pendiente longitudinal de la plantilla del fondo del canal.



Entonces, las ecuaciones que describen el crecimiento o decaimiento de las propiedades de propagación de perturbaciones de las ecuaciones de Saint-Venant no conservativas, o ecuaciones de perturbación, son las siguientes:

$$\bar{B} \frac{\partial h}{\partial t} + \bar{U} \bar{B} \frac{\partial h}{\partial x} + \left(\bar{B}_H \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} + \bar{B} \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + \bar{U} \frac{\partial \bar{B}}{\partial x} \right) h + \bar{A} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \bar{A}}{\partial x} u + O(\|h\|^2, \|h\| \|u\|) = 0 \quad (4.2.22)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + g \bar{S}_{fv} \right) u + g \frac{\partial h}{\partial x} + g \bar{S}_{fH} h + O(\|h\| + \|u\|)^2 = 0 \quad (4.2.23)$$

4.2.2. Análisis de escalas múltiples y localización

Realizando un análisis de escalas múltiples similar al llevado a cabo para las ecuaciones conservativas considerando nuevamente que para conocer el comportamiento de cada uno de los términos de las ecuaciones de referencia (4.2.20) y (4.2.21) hay que definir cuáles términos son de igual magnitud, se propone llevar a cabo un escalamiento, tomando un punto arbitrario (x_o, t_o) de referencia en el espacio de solución Ω , de forma que:

$$H_o = \bar{H}(x_o, t_o) \quad (4.2.24)$$

$$U_o = \bar{U}(x_o, t_o) \quad (4.2.25)$$

$$B_o = \bar{B}[\bar{H}(x_o, t_o); x_o, t_o] \quad (4.2.26)$$

$$A_o = \bar{A}[\bar{H}(x_o, t_o); x_o, t_o] \quad (4.2.27)$$

$$S_o = S_b(x_o) \quad (4.2.28)$$

$$S_{f_o} = \bar{S}_f[\bar{H}(x_o, t_o), \bar{U}(x_o, t_o); x_o, t_o] \quad (4.2.29)$$

Definiendo las escalas de variables independientes de forma que

$$X = \frac{x - x_o}{\mathcal{L}} \quad (4.2.30)$$

$$\Gamma = \frac{t - t_o}{\mathcal{T}} \quad (4.2.31)$$

$$\mathcal{T} = \frac{\mathcal{L}}{U_o} \quad (4.2.32)$$

y para las escalas de la variables dependientes y con dependencia paramétrica

$$\bar{H} = H_o H^*(X, \Gamma) \quad (4.2.33)$$

$$\bar{U} = U_o U^*(X, \Gamma) \quad (4.2.34)$$

$$\bar{B} = B_o B^*[H^*(X, \Gamma); X, \Gamma] \quad (4.2.35)$$

$$\bar{A} = A_o A^*[H^*(X, \Gamma); X, \Gamma] \quad (4.2.36)$$



$$S_b = S_o S_b^*(X) \quad (4.2.37)$$

$$\bar{S}_f = S_{f_o} S_f^* [H^*(X, T), U^*(X, T); X, T] \quad (4.2.38)$$

Como paso subsecuente, sustituyendo los escalamientos (4.2.30)-(4.2.36) en (4.2.20)

$$\frac{B_o H_o}{\mathcal{E}} B^* \frac{\partial H^*}{\partial T} + \frac{U_o A_o}{\mathcal{L}} \frac{\partial}{\partial X} (U^* A^*) = B^* \frac{\partial H^*}{\partial T} + \frac{\partial}{\partial X} (U^* A^*) = O(1) \quad (4.2.39)$$

La ecuación anterior indica que los términos de la ecuación de conservación de masa son de igual magnitud, y este principio se mantiene después de aplicar el escalamiento.

Por otra parte, aplicando los escalamientos (4.2.30)-(4.2.32), (4.2.33), (4.2.34), (4.2.37) y (4.2.38) en la ecuación de cantidad de movimiento (4.2.21)

$$\frac{U_o}{\mathcal{E}} \frac{\partial U^*}{\partial T} + \frac{U_o^2}{\mathcal{L}} U^* \frac{\partial U^*}{\partial X} + g \frac{H_o}{\mathcal{L}} \frac{\partial H^*}{\partial X} + g (S_{f_o} S_f^* - S_o S_b^*) = 0 \quad (4.2.40)$$

y desarrollado

$$\frac{\partial U^*}{\partial T} + U^* \frac{\partial U^*}{\partial X} + g \frac{H_o}{U_o^2} \frac{\partial H^*}{\partial X} + g \frac{\mathcal{L}}{U_o^2} (S_{f_o} S_f^* - S_o S_b^*) = 0 \quad (4.2.41)$$

en la expresión anterior $g H_o / U_o^2 = F_r^{-2} = O(1)$, donde F_r es el número de Froude. En el caso del término de fricción $g \mathcal{L} / U_o^2 S_{f_o} = O(1/\delta)$ (ecuación 4.1.63) y $g \mathcal{L} / U_o^2 S_o = O(1/\delta)$ (ecuación 4.1.65). Entonces, la ecuación (4.2.41) se puede escribir como:

$$\begin{array}{ccccccc} \frac{\partial U^*}{\partial T} & + & U^* \frac{\partial U^*}{\partial X} & + & g \frac{H_o}{U_o^2} \frac{\partial H^*}{\partial X} & + & g \frac{1}{\delta} (S_{f_o} - S_o) A^* S_f^* = 0 \\ O(1) & & O(1) & & O(1) & & O(1/\delta) - O(1/\delta) \end{array} \quad (4.2.42)$$

El término fricción tiene una representación similar a la que se dedujo en las ecuaciones conservativas, lo cual indica que la diferencia $(S_{f_o} - S_o) = O(\delta)$.

Tomando en cuenta las características del escalamiento anterior, con respecto a las ecuaciones de referencia en un punto arbitrario (x_o, t_o) sobre las variables lentas, para llevar a cabo el escalamiento de las ecuaciones de perturbación (4.2.22) y (4.2.23) es necesario introducir las siguientes escalas para el mismo punto arbitrario sobre el dominio de solución (x_o, t_o) , en este caso para las variables de perturbación o de variación rápida, las cuales son:



$$\zeta = \frac{x - x_0}{\Lambda_x} \quad (4.2.43)$$

$$\tau = \frac{t - t_0}{\Lambda_t} \quad (4.2.44)$$

donde

$$\Lambda_t = \frac{\Lambda_x}{U_0} \quad (4.2.45)$$

$$\varepsilon = \frac{\Lambda_x}{\mathcal{L}} = \frac{\Lambda_t}{\mathcal{T}} \ll 1 \quad (4.2.46)$$

Además, las escalas para las variables dependientes de perturbación son:

$$h = \varepsilon H_0 h^*(\zeta, \tau) \quad (4.2.47)$$

$$u = \varepsilon U_0 u^*(\zeta, \tau) \quad (4.2.48)$$

Sustituyendo las ecuaciones (4.2.33)-(4.2.36), (4.2.43)-(4.2.48) en la ecuación de perturbación de masa (4.2.22)

$$\begin{aligned} & \frac{\varepsilon H_0 B_0}{\Lambda_t} B^* \frac{\partial h^*}{\partial \tau} + \frac{\varepsilon H_0 U_0 B_0}{\Lambda_x} U^* B^* \frac{\partial h^*}{\partial \zeta} + \frac{\varepsilon A_0 U_0}{\Lambda_x} A^* \frac{\partial u^*}{\partial \zeta} + \frac{\varepsilon A_0 U_0}{\mathcal{L}} \frac{\partial A^*}{\partial X} u^* + \\ & \varepsilon H_0 \left(\frac{B_0}{\mathcal{T}} B_H^* \frac{\partial H^*}{\partial \Gamma} + \frac{U_0 B_0}{\mathcal{L}} B^* \frac{\partial U^*}{\partial X} + \frac{U_0 B_0}{\mathcal{L}} U^* \frac{\partial B^*}{\partial X} \right) h^* + O(\varepsilon^2) = 0 \end{aligned} \quad (4.2.49)$$

o, también

$$B^* \frac{\partial h^*}{\partial \tau} + U^* B^* \frac{\partial h^*}{\partial \zeta} + A^* \frac{\partial u^*}{\partial \zeta} + \varepsilon \frac{\partial A^*}{\partial X} u^* + \varepsilon \left(B_H^* \frac{\partial H^*}{\partial \Gamma} + B^* \frac{\partial U^*}{\partial X} + U^* \frac{\partial B^*}{\partial X} \right) h^* + O(\varepsilon) = 0 \quad (4.2.50)$$

considerando explícitamente únicamente los términos de orden $O(\varepsilon)$ en la ecuación anterior

$$B^* \frac{\partial h^*}{\partial \tau} + U^* B^* \frac{\partial h^*}{\partial \zeta} + A^* \frac{\partial u^*}{\partial \zeta} + O(\varepsilon) = 0 \quad (4.2.51)$$

Para el escalamiento de la ecuación de cantidad de movimiento de perturbación (4.2.23) se sustituyen en esta las escalas (4.2.33)-(4.2.38) y (4.2.43)-(4.2.48), de forma que

$$\begin{aligned} & \frac{\varepsilon U_0}{\Lambda_t} \frac{\partial u^*}{\partial \tau} + \frac{\varepsilon U_0^2}{\Lambda_x} U^* \frac{\partial u^*}{\partial \zeta} + \varepsilon U_0 \left(\frac{U_0}{\mathcal{L}} \frac{\partial U^*}{\partial X} + g \frac{S_{f_0}}{U_0} S_{f_v}^* \right) u^* + g \frac{\varepsilon H_0}{\Lambda_x} \frac{\partial h^*}{\partial \zeta} + \\ & g \varepsilon S_{f_0} S_{f_H}^* h^* + O(\varepsilon^2) = 0 \end{aligned} \quad (4.2.52)$$

Finalmente, considerando los escalamientos del término de fricción (4.1.63) y (4.1.65), y tomando en cuenta únicamente los términos de orden $O(\varepsilon)$ en (4.2.52)



$$\frac{\partial u^*}{\partial \tau} + U^* \frac{\partial u^*}{\partial \zeta} + g \frac{H_o}{U_o^2} \frac{\partial h^*}{\partial \zeta} + g \frac{\varepsilon}{\delta} S_{f_o} (S_{f_v}^* u^* + S_{f_H}^* h^*) + O(\varepsilon) = 0 \quad (4.2.53)$$

A continuación se llevará a cabo un análisis de localización, tomando en cuenta las definiciones de separación de escalas (4.2.33)-(4.2.38), se puede escribir que:

$$U(x, t) = U(x_o, t_o) + (x - x_o) \frac{\partial U}{\partial x} \Big|_{(x_o, t_o)} + (t - t_o) \frac{\partial U}{\partial t} \Big|_{(x_o, t_o)} + O\left\{[(x - x_o) + (t - t_o)]^2\right\} \quad (4.2.54)$$

$$u(x, t) = u(x_o, t_o) + (x - x_o) \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{(x_o, t_o)} + (t - t_o) \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{(x_o, t_o)} + O\left\{[(x - x_o) + (t - t_o)]^2\right\} \quad (4.2.55)$$

y aplicando un escalamiento en las ecuaciones (4.2.54) y (4.2.55), de forma que:

$$U_o U^* = U_o U^* + \frac{(x - x_o)}{\mathcal{L}} U_o \frac{\partial U^*}{\partial X} + \frac{(t - t_o)}{\mathcal{T}} U_o \frac{\partial U^*}{\partial T} + O\left(U_o \left[\frac{(x - x_o)}{\mathcal{L}} + \frac{(t - t_o)}{\mathcal{T}}\right]^2\right) \quad (4.2.56)$$

$$\varepsilon U_o u^* = \varepsilon U_o u^* + \frac{(x - x_o)}{\Lambda_x} \varepsilon U_o \frac{\partial u^*}{\partial \zeta} + \frac{(t - t_o)}{\Lambda_t} \varepsilon U_o \frac{\partial u^*}{\partial \tau} + O\left(\varepsilon U_o \left[\frac{(x - x_o)}{\Lambda_x} + \frac{(t - t_o)}{\Lambda_t}\right]^2\right) \quad (4.2.57)$$

Considerando además, que la variación de las escalas de magnitud pequeña pueden evaluarse por medio de las ecuaciones (4.1.88) y (4.1.89), y aplicando las magnitudes de los escalamientos anteriores en las ecuaciones (4.2.56) y (4.2.57), se tiene que:

$$U^* = 1 + O(\varepsilon) \quad (4.2.58)$$

$$u^* = 1 + O(1) \quad (4.2.59)$$

Nuevamente se puede mencionar que el resultado anterior indica que al localizar el análisis sobre un punto arbitrario, las variables de referencia tienen un comportamiento suave o de una magnitud casi estacionaria, y que las variables de perturbación tienen un comportamiento rápido o de una gran variabilidad. En forma coloquial se dice que las variables de referencia pueden ser localizadas y las variables de perturbación no pueden localizadas.

Finalmente, el sistema de ecuaciones (4.2.51) y (4.2.53), después de la localización, se puede escribir como:

$$B_o \frac{\partial h^*}{\partial \tau} + U_o B_o \frac{\partial h^*}{\partial \zeta} + A_o \frac{\partial u^*}{\partial \zeta} + O(\varepsilon) = 0 \quad (4.2.60)$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial \tau} + U_o \frac{\partial u^*}{\partial \zeta} + g \frac{H_o}{U_o^2} \frac{\partial h^*}{\partial \zeta} + g \frac{\varepsilon}{\delta} S_{f_o} (S_{f_v_o}^* u^* + S_{f_H_o}^* h^*) + O(\varepsilon) = 0 \quad (4.2.61)$$



Buscando una solución perturbatoria para las variables del sistema (4.2.60) y (4.2.61)

$$h^* = h_o^* + \varepsilon h_1^* + O(\varepsilon^2) \quad (4.2.62)$$

$$u^* = u_o^* + \varepsilon u_1^* + O(\varepsilon^2) \quad (4.2.63)$$

entonces en la solución para la condición de $\varepsilon \rightarrow 0^+$, el sistema de ecuaciones (4.2.60) y (4.2.61) queda de la manera siguiente:

$$B_o \frac{\partial h_o^*}{\partial \tau} + U_o B_o \frac{\partial h_o^*}{\partial \zeta} + A_o \frac{\partial u_o^*}{\partial \zeta} = 0 \quad (4.2.64)$$

$$\frac{\partial u_o^*}{\partial \tau} + U_o \frac{\partial u_o^*}{\partial \zeta} + g \frac{H_o}{U_o^2} \frac{\partial h_o^*}{\partial \zeta} + g \frac{\varepsilon}{\delta} S_{f_o} (S_{f_{u_o}} u_o^* + S_{f_{h_o}} h_o^*) = 0 \quad (4.2.65)$$

Al realizar la localización del sistema de ecuaciones de perturbación dentro de un dominio de solución espacial $x \in [0, L]$, donde se definió el escalamiento de $\mathcal{L}/L = O(1)$, al momento de escalar para las variables de perturbación la variable de longitud para la escala pequeña, se delimita en $\zeta = -x_o/\Lambda_x = -x_o/\varepsilon\mathcal{L}$ y $\zeta = (L - x_o)/\Lambda_x = (L - x_o)/\varepsilon\mathcal{L}$. Cuando se tiene la condición $\varepsilon \rightarrow 0^+$ el rango de variación de la escala longitudinal a nivel local es $\zeta \in (-\infty, \infty)$.

Después de aplicar el análisis local al sistema de ecuaciones (4.2.22) y (4.2.23), se ha transformado de un problema de valor inicial, no lineal, de coeficientes variables en un problema de valor inicial puro, lineal, de coeficientes constantes, que en la versión dimensional del sistema escalado de perturbación (4.2.64) y (4.2.65) se muestra del siguiente modo:

$$B_o \frac{\partial h}{\partial t} + U_o B_o \frac{\partial h}{\partial x} + A_o \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (4.2.66)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + U_o \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} + g (S_{f_{u_o}} u + S_{f_{h_o}} h) = 0 \quad (4.2.67)$$

Una forma alterna de trabajar los coeficientes del sistema de ecuaciones anteriores es considerando las siguientes constantes simplificatorias. Y, en el caso de los términos de fricción, se propone hacer uso de las ecuaciones (4.2.13) y (4.2.14):

$$D_o \equiv \frac{A_o}{B_o} \quad (4.2.68)$$



$$\begin{aligned}
 gS_{f_{H_0}} &= g \frac{dS_f}{dH} \Big|_0 \\
 &= -\frac{4}{3} \alpha \left[\frac{K_s}{R_0} \right]^{1/3} \frac{|U_0| U_0}{R_0^2} \frac{\partial R}{\partial H} \Big|_0 = F_3
 \end{aligned} \tag{4.2.69}$$

$$\begin{aligned}
 gS_{f_{U_0}} &= g \frac{dS_f}{dU} \Big|_0 \\
 &= 2\alpha \left[\frac{K_s}{R_0} \right]^{1/3} \frac{|U_0|}{R_0} = F_4
 \end{aligned} \tag{4.2.70}$$

Utilizando las relaciones anteriores en las ecuaciones (4.2.66) y (4.2.67) se tiene

$$\frac{\partial h}{\partial t} + U_0 \frac{\partial h}{\partial x} + D_0 \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \tag{4.2.71}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + U_0 \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} + F_3 h + F_4 u = 0 \tag{4.2.72}$$

4.2.3 Análisis de estabilidad

Contar con un problema sistema de ecuaciones de valor inicial puro, lineal y de coeficientes constantes (4.2.71) y (4.2.72), permite aplicar una expansión en serie de Fourier para obtener la solución de n-ésima componente sobre las variables de perturbación, de forma que: $h = \hat{h} e^{i(kx - \omega t)}$ y $u = \hat{u} e^{i(kx - \omega t)}$, donde k es el número de onda y ω la frecuencia. Aplicando estas expansiones en serie Fourier en el sistema de ecuaciones de perturbación (4.2.71) y (4.2.72), y desarrollando, se tiene:

$$e^{i(kx - \omega t)} \begin{bmatrix} \omega - U_0 & -kD_0 \\ -gk + iF_3 & \omega - kU_0 + iF_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{h} \\ \hat{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.2.73}$$

La relación de dispersión de la ecuación (4.2.73) es:

$$\omega = kU_0 - \frac{iF_4}{2} \pm \sqrt{gD_0 k^2 - \frac{F_4^2}{4} - ikD_0 F_3} \tag{4.2.74}$$

Aplicando la condición de estabilidad práctica o estricta, donde $|\omega_i| \leq 0$ en la ecuación (4.2.74) y extrayendo la parte imaginaria que está dentro del radical de la ecuación, se tiene:



$$-\frac{F_2}{2} \pm \operatorname{sgn}[-kD_o F_3] 2^{-1/2} \cdot \left\{ \left[\left(gD_o k^2 - \frac{F_4^2}{4} \right)^2 + k^2 D_o^2 F_3^2 \right]^{1/2} - gD_o k^2 + \frac{F_4^2}{4} \right\}^{1/2} \leq 0 \quad (4.2.75)$$

Dado que la condición más desfavorable en la inecuación anterior se tiene para $\operatorname{sgn}[-kD_o F_3] > 0$. Aplicando este criterio y desarrollando, se tiene que:

$$\left[\frac{D_o F_3}{F_4 \sqrt{gD_o}} \right]^2 \leq 1 \quad (4.2.76)$$

La ecuación (4.2.76) es la condición límite de estabilidad del sistema de ecuaciones de Saint-Venant, versión no conservativa (3.2.54) y (3.2.55). Por otra parte, si se sustituyen las ecuaciones (4.2.69) y (4.2.70) en (4.2.76), de forma que:

$$\left[\frac{-\frac{4}{3} D_o \alpha \left[\frac{K_s}{R_o} \right]^{1/3} \frac{|U_o| U_o}{R_o^2} \frac{\partial R}{\partial H}_o}{2\alpha \left[\frac{K_s}{R_o} \right]^{1/3} \frac{|U_o|}{R_o} \sqrt{gD_o}} \right]^2 \leq 1 \quad (4.2.77)$$

y, desarrollando, se tiene:

$$|V_e| \leq 1 \quad (4.2.78)$$

donde $V_e = \left| -\frac{2}{3} \frac{D_o}{R_o} \frac{dR}{dH}_o F_r \right|$ es el número de Vedernikov para un canal primático rectangular.

De lo anterior se puede concluir que independientemente del tipo de versión de ecuaciones de Saint-Venant que se maneje, la condición de estabilidad límite es la misma, y se define para $|V_e| \leq 1$, ecuación (4.1.114) o (4.2.78).

Como puede observarse la condición de estabilidad $|V_e| \leq 1$ es la misma para las versiones conservativa y no conservativa de las ecuaciones de Saint-Venant. Adicionalmente esta condición es aplicable no solamente a un flujo de referencia uniforme, sino a flujos de referencia gradualmente variados e incluso transitorios.



CAPÍTULO 5

ANÁLISIS DEL ESQUEMA DE PREISSMANN

En la práctica de la ingeniería se hace necesario conocer el comportamiento del flujo a superficie libre unidimensional en ríos y canales, para uno o varios puntos y para diferentes momentos. Esto es posible haciendo uso de las ecuaciones unidimensionales de Saint-Venant (capítulo 2.3), con la salvedad de que no es posible obtener una solución explícita debido a que dichas ecuaciones son diferenciales parciales no lineales, y en este momento no se cuenta con las herramientas matemáticas suficientes que permitan tener una solución general para cualquier condición de frontera (Cunge, *et al.*, 1980; Abbott, 1979).

Debido a lo anterior, para solucionar las ecuaciones de flujo mencionadas anteriormente se hace uso de una metodología de aproximación en diferencias finitas o elemento finito. Esto se debe a que esta metodología transforma el sistema de ecuaciones diferenciales parciales no lineales en un sistema de ecuaciones algebraicas no lineales, donde se puede incluir cualquier condición de frontera, y la forma de solución de las ecuaciones algebraicas es por medio de diversos métodos numéricos del álgebra lineal (Burden y Faires, 1985; Gerald, 1987; Chapra y Canale, 1989; Celia y Gray, 1992; Press *et al.*, 1992).



Tomando en consideración lo anterior, en esta parte del documento se estudiarán, lo más detalladamente posible, las propiedades de propagación del esquema implícito en diferencias finitas conocido bajo las siguientes denominaciones: Esquema de Caja (*Box Scheme*), Esquema de Cuatro Puntos o, simplemente, Esquema de Preissmann (Cunge y Wegner, 1964; Abbott, 1979; Cunge, *et al.*, 1980; Abbott y Basco, 1989).

Anteriormente se han realizado diversos estudios de análisis de consistencia y estabilidad del esquema de Preissmann (Abbott, 1979; Cunge *et al.*, 1980; Lyn y Goodwin, 1987; Abbott y Basco, 1989; Samuels y Skeels, 1990; Meselhe y Holly, 1997), pero dichos estudios no tienen carácter general, ya sea, por que no utilizan las ecuaciones de Saint-Venant en forma completa (Abbott, 1979; Cunge *et al.*, 1980; Abbott y Basco, 1989), o porque eliminan el término de fricción y estudian una versión euleriana. Otros estudios más completos incluyen el término de fricción o una linealización del mismo (Lyn y Goodwin, 1987; Meselhe y Holly, 1997), pero sin considerar el efecto del factor de peso temporal (Samuels y Skeels, 1990). Entonces, en esta parte del estudio se propone realizar un análisis lo más completo posible del esquema de Preissmann, considerando el uso de la metodología para determinación de propagación de perturbaciones como se propuso en el capítulo 3.

5.1. Análisis de consistencia

Se trata de una herramienta que permite estudiar el comportamiento asintótico que se involucra en el refinamiento de la malla o un conjunto de refinamientos, en la discretización de Preissmann (Abbott, 1989) de las ecuaciones de Saint-Venant en su versión conservativa diferencial (definición 2.2). Para ello se toma como punto de partida la definición del sistema de ecuaciones por analizar, donde

conservación de masa:

$$\mathcal{L}(\tilde{A}, \tilde{Q}; x, t) = \frac{\partial \tilde{A}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial x} = 0 \quad (2.3.52)$$

cantidad de movimiento:

$$\mathcal{M}(\tilde{A}, \tilde{Q}; x, t) = \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\tilde{Q}^2}{\tilde{A}} \right) + g \tilde{A} \left(\frac{\partial h(\tilde{A}; x, t)}{\partial x} + \tilde{S}_f(\tilde{A}, \tilde{Q}; x, t) \right) = 0 \quad (2.3.53)$$

donde x es la coordenada en el sentido horizontal y t el tiempo, como variables independientes; $\tilde{A}(x, t)$ y $\tilde{Q}(x, t)$ el área y gasto respectivamente, como variables dependientes; además $(x, t) \in \Omega = [0, L] \times [0, T]$ delimitan el espacio de solución; L ,



longitud de la conducción; T , tiempo final de solución; g , aceleración de la gravedad; $h(\tilde{A}; x, t) = y(\tilde{A}; x, t) + z_b(x)$ la elevación de la superficie libre del agua desde un nivel de referencia; $y(\tilde{A}; x, t)$ elevación de la superficie libre del agua medida desde la plantilla del fondo del canal; $z_b(x)$ la elevación de la plantilla del fondo del canal desde un nivel de referencia y $S_f(\tilde{A}, \tilde{Q}; x, t)$ la pendiente de fricción (ecuación 2.3.45).

El sistema de ecuaciones (2.3.52) y (2.3.53) constituye un problema bien planteado de valor inicial y de valores en la frontera, que está sujeto a las condiciones iniciales para $\tilde{A}(x, 0) = A_0(x)$ y $\tilde{Q}(x, 0) = Q_0(x)$. Las condiciones de frontera se definen para flujo subcrítico y supercrítico como se describen en las ecuaciones (2.3.48)-(2.3.51).

Para discretizar el sistema continuo (2.3.52) y (2.3.53) en un esquema de Preissmann (lámina 5.1), se considera una función continua $\tilde{F}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$, donde $\Omega(x, t)$ es el espacio de solución y \mathbb{R} el conjunto de los números reales. A su vez se tiene una variable discreta F_j^n que se aproxima a $\tilde{F}(x_j, t_n)$ en un punto (x_j, t_n) del espacio Ω . Además, el espacio de solución $\Omega(x, t)$ es cubierto con una malla uniforme de espaciado Δx para cualquier intervalo Δt , donde $\Delta x = L/J$, $\Delta t = T/N$ y J y N son números enteros e indican la cantidad de intervalos computacionales de discretización espacial y temporal respectivamente, de forma que $\Omega(x_j, t_n) = \Omega(j\Delta x, n\Delta t)$ y el conjunto de puntos de los subíndices j se agrupan en el vector \mathbf{J}_Ω .

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

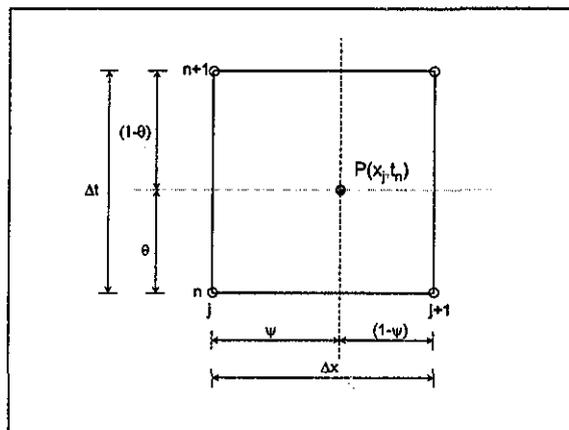


Lámina 5.1. Representación en el plano x-t del esquema de Preissmann (Box Scheme).

Entonces, la propuesta de discretización en diferencias finitas de Preissmann (Abbott, 1979) para la derivada espacial, temporal y términos independientes se describe a continuación:



Discretización de las derivadas temporales:

$$\frac{\partial \tilde{F}}{\partial t} = (1 - \psi) \left[\frac{F_j^{n+1} - F_j^n}{\Delta t} \right] + \psi \left[\frac{F_{j+1}^{n+1} - F_{j+1}^n}{\Delta t} \right] \quad (5.1.1)$$

donde $\psi \in [1,0]$ es el factor de peso espacial.

Discretización de las derivadas espaciales:

$$\frac{\partial \tilde{F}}{\partial x} = \theta \left[\frac{F_{j+1}^{n+1} - F_j^{n+1}}{\Delta x} \right] + (1 - \theta) \left[\frac{F_{j+1}^n - F_j^n}{\Delta x} \right] \quad (5.1.2)$$

donde $\theta \in [1,0]$ es el factor de peso temporal.

Discretización de los términos adicionales:

$$\tilde{F} = (1 - \theta) \left[(1 - \psi) F_j^n + \psi F_{j+1}^n \right] + \theta \left[(1 - \psi) F_j^{n+1} + \psi F_{j+1}^{n+1} \right] \quad (5.1.3)$$

Entonces para construir el esquema en diferencias según el esquema de Preissmann de las ecuaciones de Saint-Venant conservativas (2.3.52) y (2.3.53) se sustituyen los operadores de discretización (5.1.1)-(5.1.3), de forma que

$$(1 - \psi) \frac{A_j^{n+1} - A_j^n}{\Delta t} + \psi \frac{A_{j+1}^{n+1} - A_{j+1}^n}{\Delta t} + (1 - \theta) \frac{Q_{j+1}^n - Q_j^n}{\Delta x} + \theta \frac{Q_{j+1}^{n+1} - Q_j^{n+1}}{\Delta x} = 0 \quad (5.1.4)$$

$$\frac{(1 - \psi)}{\Delta t} (Q_j^{n+1} - Q_j^n) + \frac{\psi}{\Delta t} (Q_{j+1}^{n+1} - Q_{j+1}^n) +$$

$$\frac{(1 - \theta)}{\Delta x} \left[\left(\frac{Q^2}{A} \right)_{j+1}^n - \left(\frac{Q^2}{A} \right)_j^n \right] + \frac{\theta}{\Delta x} \left[\left(\frac{Q^2}{A} \right)_{j+1}^{n+1} - \left(\frac{Q^2}{A} \right)_j^{n+1} \right] + \quad (5.1.5)$$

$$g \left\{ (1 - \theta) \left[(1 - \psi) A_j^n + \psi A_{j+1}^n \right] + \theta \left[(1 - \psi) A_j^{n+1} + \psi A_{j+1}^{n+1} \right] \right\}$$

$$\left\{ \frac{(1 - \theta)}{\Delta x} (h_{j+1}^n - h_j^n) + \frac{\theta}{\Delta x} (h_{j+1}^{n+1} - h_j^{n+1}) + \right.$$

$$\left. (1 - \theta) \left[(1 - \psi) A_j^n S_{f_j}^n + \psi A_{j+1}^n S_{f_{j+1}}^n \right] + \theta \left[(1 - \psi) A_j^{n+1} S_{f_j}^{n+1} + \psi A_{j+1}^{n+1} S_{f_{j+1}}^{n+1} \right] \right\} = 0$$

Una vez que se tiene el sistema discreto (5.1.4) y (5.1.5), y para proceder al estudio de la determinación de la consistencia numérica, se debe tomar en cuenta que las variables discretas dependientes A_j^n, Q_j^n tienen valores sólo en la posición $P(x_j, t_n)$. Entonces se hace necesario proponer una función polinomial



que pase por para cada punto de discretización del espacio, de manera que $A(x_j, t_n) = A_j^n, Q(x_j, t_n) = Q_j^n$, y estas funciones polinomiales A y Q tienen la propiedad de cumplir con requisitos suficientes de continuidad, de forma que permitan aplicar una expansión en serie de Taylor de grado n .

Una vez definidos los requisitos de continuidad para las funciones polinomiales A y Q, se propone realizar la aplicación de un expansión en serie de Taylor para cada uno de los cuatro puntos $F(x_j, t_{n+1}), F(x_{j+1}, t_{n+1}), F(x_j, t_n)$ y $F(x_{j+1}, t_n)$, en los que tiene influencia el esquema de Preissmann (lámina 5.1). Entonces, la expansión de la esquina superior izquierda es:

$$\begin{aligned}
 F(x_j, t_{n+1}) &= F(x - \psi\Delta x, t + (1 - \theta)\Delta t) \\
 &= F(x, t) - \psi\Delta x \frac{\partial F}{\partial x} \Big|_{(x,t)} + (1 - \theta)\Delta t \frac{\partial F}{\partial t} \Big|_{(x,t)} + \frac{\psi^2 \Delta x^2}{2!} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \Big|_{(x,t)} - \\
 &\quad \psi(1 - \theta)\Delta x \Delta t \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial t} \Big|_{(x,t)} + \frac{(1 - \theta)^2 \Delta t^2}{2!} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} \Big|_{(x,t)} - \frac{\psi^3 \Delta x^3}{3!} \frac{\partial^3 F}{\partial x^3} \Big|_{(x,t)} + \\
 &\quad \frac{\psi^2 (1 - \theta)\Delta x^2 \Delta t}{2} \frac{\partial^3 F}{\partial x^2 \partial t} \Big|_{(x,t)} - \frac{\psi(1 - \theta)^2 \Delta x \Delta t^2}{2} \frac{\partial^3 F}{\partial x \partial t^2} \Big|_{(x,t)} + \\
 &\quad \frac{(1 - \theta)^3 \Delta t^3}{3!} \frac{\partial^3 F}{\partial t^3} \Big|_{(x,t)} + O[(\Delta x + \Delta t)^4]
 \end{aligned} \tag{5.1.6}$$

Para manejar una notación más compacta de esta expansión en serie de Taylor y de las que se manejarán más adelante, se consideran la siguiente notación: $\partial F / \partial x = F_x, \partial F / \partial t = F_t, \partial^2 F / \partial x^2 = F_{xx}, \partial^2 F / \partial x \partial t = F_{xt}, \partial^2 F / \partial t^2 = F_{tt}, \partial^3 F / \partial x^3 = F_{xxx}, \partial^3 F / \partial x^2 \partial t = F_{xxt}, \partial^3 F / \partial x \partial t^2 = F_{xtt}$ y $\partial^3 F / \partial t^3 = F_{ttt}$. Sustituyendo esta notación en la expansión (5.1.6) se tiene:

$$\begin{aligned}
 F(x_j, t_{n+1}) &= F(x - \psi\Delta x, t + (1 - \theta)\Delta t) \\
 &= F - \psi\Delta x F_x + (1 - \theta)\Delta t F_t + \frac{\psi^2 \Delta x^2}{2!} F_{xx} - \psi(1 - \theta)\Delta x \Delta t F_{xt} + \frac{(1 - \theta)^2 \Delta t^2}{2!} F_{tt} - \\
 &\quad \frac{\psi^3 \Delta x^3}{3!} F_{xxx} + \frac{\psi^2 (1 - \theta)\Delta x^2 \Delta t}{2} F_{xxt} - \frac{\psi(1 - \theta)^2 \Delta x \Delta t^2}{2} F_{xtt} + \\
 &\quad \frac{(1 - \theta)^3 \Delta t^3}{3!} F_{ttt} + O[(\Delta x + \Delta t)^4]
 \end{aligned} \tag{5.1.7}$$

Por otra parte, las expansiones en serie de Taylor para las otras esquinas del esquema de Preissmann son:



Esquina superior derecha:

$$\begin{aligned}
 F(x_{j+1}, t_{n+1}) &= F(x + (1-\psi)\Delta x, t + (1-\theta)\Delta t) \\
 &= F + (1-\psi)\Delta x F_x + (1-\theta)\Delta t F_t + \frac{(1-\psi)^2 \Delta x^2}{2!} F_{xx} + (1-\psi)(1-\theta)\Delta x \Delta t F_{xt} + \\
 &\quad \frac{(1-\theta)^2 \Delta t^2}{2!} F_{tt} + \frac{(1-\psi)^3 \Delta x^3}{3!} F_{xxx} + \frac{(1-\psi)^2 (1-\theta)\Delta x^2 \Delta t}{2} F_{xxt} + \\
 &\quad \frac{(1-\psi)(1-\theta)^2 \Delta x \Delta t^2}{2} F_{xtt} + \frac{(1-\theta)^3 \Delta t^3}{3!} F_{ttt} + O[(\Delta x + \Delta t)^4]
 \end{aligned} \tag{5.1.8}$$

Esquina inferior izquierda:

$$\begin{aligned}
 F(x_j, t_n) &= F(x - \psi\Delta x, t - \theta\Delta t) \\
 &= F - \psi\Delta x F_x - \theta\Delta t F_t + \frac{\psi^2 \Delta x^2}{2!} F_{xx} + \psi\theta\Delta x \Delta t F_{xt} + \frac{\theta^2 \Delta t^2}{2!} F_{tt} - \frac{\psi^3 \Delta x^3}{3!} F_{xxx} - \\
 &\quad \frac{\psi^2 \theta \Delta x^2 \Delta t}{2} F_{xxt} - \frac{\psi \theta^2 \Delta x \Delta t^2}{2} F_{xtt} - \frac{\theta^3 \Delta t^3}{3!} F_{ttt} + O[(\Delta x + \Delta t)^4]
 \end{aligned} \tag{5.1.9}$$

Esquina inferior derecha:

$$\begin{aligned}
 F(x_{j+1}, t_n) &= F(x + (1-\psi)\Delta x, t - \theta\Delta t) \\
 &= F + (1-\psi)\Delta x F_x - \theta\Delta t F_t + \frac{(1-\psi)^2 \Delta x^2}{2!} F_{xx} - (1-\psi)\theta\Delta x \Delta t F_{xt} + \frac{\theta^2 \Delta t^2}{2!} F_{tt} + \\
 &\quad \frac{(1-\psi)^3 \Delta x^3}{3!} F_{xxx} - \frac{(1-\psi)^2 \theta \Delta x^2 \Delta t}{2} F_{xxt} + \frac{(1-\psi)\theta^2 \Delta x \Delta t^2}{2} F_{xtt} - \\
 &\quad \frac{\theta^3 \Delta t^3}{3!} F_{ttt} + O[(\Delta x + \Delta t)^4]
 \end{aligned} \tag{5.1.10}$$

Entonces, la consistencia numérica de los operadores de la propuesta de Preissmann, tanto para la derivada temporal (5.1.1) como para la derivada espacial (5.1.2) y para los términos independientes (5.1.3), se determina sustituyendo en estas las expansiones (5.1.7)-(5.1.10) y desarrollando:

$$\frac{\partial \tilde{F}}{\partial t} = F_t + \frac{(1-2\theta)}{2} \Delta t F_{tt} + \frac{\psi(1-\psi)}{3!} \Delta x^2 F_{xxt} + \frac{1-3\theta-3\theta^2}{3!} \Delta t^2 F_{ttt} + O(\Delta x^3, \Delta t^3) \tag{5.1.11}$$

$$\frac{\partial \tilde{F}}{\partial x} = F_x - \frac{(1-2\psi)}{2} \Delta x F_{xx} - \frac{1-3\psi+3\psi^2}{3!} \Delta x^2 F_{xxx} - \frac{\theta(1-\theta)}{3!} \Delta t^2 F_{xtt} + O(\Delta x^3, \Delta t^3) \tag{5.1.12}$$

$$\tilde{F} = F + \frac{\psi(1-\psi)}{2} \Delta x^2 F_{xx} + \frac{\theta(1-\theta)}{2} \Delta t^2 F_{tt} + O(\Delta x^3, \Delta t^3) \tag{5.1.13}$$



En el caso de que los valores de los factores de peso temporal y espacial sean $\theta = 1/2$ y $\psi = 1/2$, entonces el orden de consistencia numérica de los operadores (5.1.14)-(5.1.16) es $O(\Delta x^2, \Delta t^2)$. Para valores diferentes de los factores de peso, el orden de consistencia es menor.

Finalmente, la consistencia numérica del esquema de Preissmann aplicado a las ecuaciones de Saint-Venant (2.3.52) y (2.3.53) se determina sustituyendo en estas las ecuaciones (5.1.11)-(5.1.13), de forma que:

$$\begin{aligned} \ell(A, Q) = & A_t + Q_x + \frac{(1-2\theta)}{2} \Delta t A_{tt} - \frac{(1-2\psi)}{2} \Delta x Q_{xx} + \frac{1-3\theta+3\theta^2}{3!} \Delta t^2 A_{ttt} + \\ & \frac{\psi(1-\psi)}{2} \Delta x^2 A_{txx} - \frac{1-3\psi+3\psi^2}{3!} \Delta x^2 Q_{xxx} - \frac{\theta(1-\theta)}{2} \Delta t^2 Q_{ttx} + O[(\Delta x + \Delta t)^3] \end{aligned} \quad (5.1.14)$$

$$\begin{aligned} m(A, Q) = & Q_t + \left(\frac{Q^2}{A} \right)_x + g A (h_x + S_f) + \frac{(1-2\theta)}{2} \Delta t Q_{tt} + \\ & \frac{\psi(1-\psi)}{2} \Delta x^2 Q_{txx} + \frac{1-3\theta+3\theta^2}{3!} \Delta t^2 Q_{ttt} + \frac{(1-2\psi)}{2} \Delta x \left(\frac{Q^2}{A} \right)_{xx} + \\ & \frac{1-3\psi+3\psi^2}{3!} \Delta x^2 \left(\frac{Q^2}{A} \right)_{xxx} + \frac{\theta(1-\theta)}{2} \Delta t^2 \left(\frac{Q^2}{A} \right)_{ttx} + \\ & g \left[\frac{\psi(1-\psi)}{2} \Delta x^2 A_{xx} + \frac{\theta(1-\theta)}{2} \Delta t^2 A_{tt} \right] (h_x + S_f) + \\ & g A \left[\frac{(1-2\psi)}{2} \Delta x h_{xx} + \frac{1-3\psi+3\psi^2}{3!} \Delta x^2 h_{xxx} + \frac{\theta(1-\theta)}{2} \Delta t^2 h_{ttx} + \right. \\ & \left. \frac{\psi(1-\psi)}{2} \Delta x^2 S_{fxx} + \frac{\theta(1-\theta)}{2} \Delta t^2 S_{ftt} \right] + O[(\Delta x + \Delta t)^3] \end{aligned} \quad (5.1.15)$$

Del resultado anterior se puede evaluar el grado de aproximación, el cual varía dependiendo de los valores que puedan tomar los factores de peso espacial y temporal. Entonces, si se tiene que los valores de los factores de peso están centrados en la célula de aproximación de Preissmann, de manera que $\psi = \theta = 1/2$, entonces se determina que el orden de aproximación de (5.1.14) y (5.1.15) es:

$$\ell(A, Q) = A_t + Q_x + O(\Delta x^2, \Delta t^2) \quad (5.1.16)$$

$$m(A, Q) = Q_t + \left(\frac{Q^2}{A} \right)_x + g A (h_x + S_f) + O(\Delta x^2 + \Delta t^2) \quad (5.1.17)$$



Por otra parte, en el caso de tener un valor de $\psi \neq 1/2$, $\theta \neq 1/2$, y manteniendo el rango de variación $\psi \in [1,0]$, $\theta \in [1,0]$, entonces el orden de consistencia de (5.1.14) y (5.1.15) es:

$$\ell(A,Q) = A_t + Q_x + O(\Delta x, \Delta t) \quad (5.1.18)$$

$$m(A,Q) = Q_t + \left(\frac{Q^2}{A} \right)_x + gA(h_x + S_f) + O(\Delta x + \Delta t) \quad (5.1.19)$$

Finalmente, el grado de consistencia numérica del esquema de Preissmann se enuncia mediante el siguiente teorema:

Teorema 5.1. La aplicación del esquema de Preissmann (5.1.1)-(5.1.3) en el sistema de ecuaciones de Saint-Venant (2.3.52), (2.3.53) es consistente numéricamente bajo cualquier norma, cuando se tiene un refinamiento de la malla de forma que $\Delta x, \Delta t \rightarrow 0$.

Demostración: Se toman los sistemas de ecuaciones (2.3.52), (2.3.53) y (5.1.14), (5.1.15) y se refina la malla, de forma que se llega a la siguiente aproximación bajo cualquier norma:

$$\| \mathcal{L}(\tilde{A}, \tilde{Q}) - \ell(A,Q) \| \rightarrow 0 \quad \text{cuando } \Delta x, \Delta t \rightarrow 0 \quad (5.1.20)$$

$$\| \mathcal{M}(\tilde{A}, \tilde{Q}) - m(A,Q) \| \rightarrow 0 \quad \text{cuando } \Delta x, \Delta t \rightarrow 0 \quad (5.1.21)$$



Con la demostración del Teorema 5.1 se concluye que el esquema de Preissmann aplicado a las ecuaciones de Saint-Venant es consistente numéricamente.

5.2. Construcción del sistema perturbado

Continuando con el análisis del esquema de Preissmann aplicado a las ecuaciones de Saint-Venant conservativas (5.1.4) y (5.1.5), en esta parte se determinará la propagación de perturbaciones, introduciendo una pequeña perturbación que actúa sobre las variables dependientes de área y gasto, de forma que:



$$A_j^n = \bar{A}_j^n + a_j^n \quad ; \quad \left\| \bar{A}_j^n \right\|_D \gg \left\| a_j^n \right\|_D \quad (5.2.1)$$

$$Q_j^n = \bar{Q}_j^n + q_j^n \quad ; \quad \left\| \bar{Q}_j^n \right\|_D \gg \left\| q_j^n \right\|_D \quad (5.2.2)$$

donde \bar{A}_j^n, \bar{Q}_j^n son valores de referencia que tienen una variación suave o lenta dentro del dominio de solución, y a_j^n, q_j^n son pequeñas perturbaciones que actúan sobre los valores de referencia y presentan una variación brusca o rápida y $\| \cdot \|_D$ es cualquier tipo de norma sobre los valores discretos.

Tomando en cuenta, de manera similar a como se definió en el subcapítulo (5.1), que las variables de referencia y de perturbación son variables discretas, por lo que sólo tienen valores en los puntos de discretización del dominio, y con el fin de evaluar las propiedades de propagación de perturbaciones, se propone introducir un polinomio que pase por cada punto del espacio de discretización $\Omega = \Omega(x_j, t_n)$, de manera que $\bar{A}_j^n = \bar{A}_j^n, \bar{Q}_j^n = \bar{Q}_j^n$. En esta condición, las perturbaciones son pequeñas variaciones sobre las variables de referencia polinomiales. Los polinomios \bar{A}_j^n, \bar{Q}_j^n tienen la propiedad de contar con los suficientes requisitos de continuidad que permiten aplicar una derivada de grado n .

Debido a que para el uso de las funciones polinomiales antes descritas es necesario cambiar de notación en las variables de las ecuaciones, tanto del esquema de Preissmann (5.1.4) y (5.1.5) como al momento donde se introduce una pequeña perturbación (ecuaciones 5.2.1 y 5.2.2), y con fin de tener una notación más ágil, se propone no cambiar de notación de las variables en cursiva por tipo times no cursiva, aunque el hecho de no hacer este cambio no significa que se pierdan las propiedades de continuidad de los polinomios sobre las variables de referencia antes mencionadas.

Entonces, para continuar con el estudio de la propagación de perturbaciones, se introducen las ecuaciones de perturbación (5.2.1) y (5.2.2) en el esquema de discretización en diferencias (5.1.4) y (5.1.5), de manera que:

$$\mathcal{L}(A_j^n, Q_j^n) = \mathcal{L}(\bar{A}_j^n + a_j^n, \bar{Q}_j^n + q_j^n) \quad (5.2.3)$$

$$\mathcal{M}(A_j^n, Q_j^n) = \mathcal{M}(\bar{A}_j^n + a_j^n, \bar{Q}_j^n + q_j^n) \quad (5.2.4)$$

Como se puede observar en (5.1.4), el operador de conservación de masa $\mathcal{L}()$ es lineal. Por tanto, se puede separar en un operador para los términos de



referencia y otro para los de perturbación, de manera que es posible escribir la ecuación (5.2.3) como:

$$\mathcal{L}(A_j^n, Q_j^n) = \mathcal{L}(\bar{A}_j^n, \bar{Q}_j^n) + \mathcal{L}(a_j^n, q_j^n) \quad (5.2.5)$$

Para el caso del operador de cantidad de movimiento $\mathcal{M}(\cdot)$ (ecuación 5.1.5), es lineal sólo el primer término, y los demás términos son no lineales, por lo que se propone llevar el estudio de propagación término a término donde se presenten no lineales, de forma que para el segundo término de la ecuación de cantidad de movimiento (5.2.4), sea necesario aplicar una expansión binomial debido a que $\|\bar{A}_j^n\|_D \gg \|a_j^n\|_D$ (Nayfeh, 1980). Entonces

$$\begin{aligned} (\bar{Q}_j^n + q_j^n)^2 (\bar{A}_j^n + a_j^n)^{-1} &= \left[(\bar{Q}_j^n)^2 + 2\bar{Q}_j^n q_j^n \right] \left[(\bar{A}_j^n)^{-1} - a_j^n (\bar{A}_j^n)^{-2} \right] + \\ &O\left[(\|a_j^n\|_D + \|q_j^n\|_D)^2 \right] \end{aligned} \quad (5.2.6)$$

o también

$$\left[\frac{(\bar{Q} + q)^2}{\bar{A} + a} \right]_j^n = \left(\frac{\bar{Q}^2}{\bar{A}} \right)_j^n - \left(\frac{\bar{Q}^2}{\bar{A}^2} \right)_j^n a_j^n + 2 \left(\frac{\bar{Q}}{\bar{A}} \right)_j^n q_j^n + O\left[(\|a_j^n\|_D + \|q_j^n\|_D)^2 \right] \quad (5.2.7)$$

Para el tercer término de (5.2.4), se tiene una dependencia paramétrica sobre la variable dependiente de área, por lo que se propone aplicar una expansión en serie de Frechét-Taylor (ecuación 3.3.6), como se muestra a continuación:

$$h(\bar{A} + a)_j^n = h(\bar{A})_j^n + a_j^n \frac{\partial h(A)}{\partial A} \Big|_{\bar{A}(x_j, t_n)} + O\left(\|a_j^n\|_D^2 \right) \quad (5.2.8)$$

considerando una notación más compacta en la expansión (5.2.8)

$$h(\bar{A} + a)_j^n = \bar{h}_j^n + a_j^n \bar{h}_{A_j}^n + O\left(\|a_j^n\|_D^2 \right) \quad (5.2.9)$$

donde se incluyen las siguientes variables de simplificación

$$\bar{h}_j^n \equiv h(\bar{A})_j^n \quad (5.2.10)$$

$$\bar{h}_{A_j}^n \equiv \frac{\partial h(A)}{\partial A} \Big|_{\bar{A}(x_j, t_n)} \quad (5.2.11)$$

Para el cuarto término de la ecuación de cantidad de movimiento (5.2.4) se tiene que la variable de la pendiente de fricción presenta una dependencia paramétrica con respecto a las dos variables de referencia de área y gasto. Se propone entonces aplicar una expansión en serie de Frechét-Taylor (ecuación 3.3.6) en las dos dimensiones paramétricas, como se muestra a continuación:



$$S_f(\bar{A} + a, \bar{Q} + q)_j^n = S_f(\bar{A}, \bar{Q})_j^n + a_j^n \frac{\partial S_f(A, Q)}{\partial A} \Big|_{\bar{A}(x_j, t_n)} + q_j^n \frac{\partial S_f(A, Q)}{\partial Q} \Big|_{\bar{Q}(x_j, t_n)} + O\left[\left(\|a_j^n\|_D + \|q_j^n\|_D\right)^2\right] \quad (5.2.12)$$

A su vez, una forma más compacta de la ecuación (5.2.12) es:

$$S_f(\bar{A} + a, \bar{Q} + q)_j^n = \bar{S}_{f_j}^n + a_j^n \bar{S}_{f_A j}^n + q_j^n \bar{S}_{f_Q j}^n + O\left[\left(\|a_j^n\|_D + \|q_j^n\|_D\right)^2\right] \quad (5.2.13)$$

donde se tienen las siguientes variables simplificatorias:

$$\bar{S}_{f_j}^n \equiv S_f(\bar{A}, \bar{Q})_j^n \quad (5.2.14)$$

$$\bar{S}_{f_A j}^n \equiv \frac{\partial S_f(A, Q)}{\partial A} \Big|_{\bar{A}(x_j, t_n)} \quad (5.2.15)$$

$$\bar{S}_{f_Q j}^n \equiv \frac{\partial S_f(A, Q)}{\partial Q} \Big|_{\bar{Q}(x_j, t_n)} \quad (5.2.16)$$

En el caso de las variables de simplificación (5.2.15) y (5.2.16), si se hace uso de la ecuación de fricción dimensionalmente homogénea de Chezy-Manning (2.3.45), entonces los términos $\bar{S}_{f_A j}^n$, $\bar{S}_{f_Q j}^n$ se definen por las ecuaciones (4.1.25) y (4.1.26) respectivamente.

Revisando las ecuaciones (5.2.7), (5.2.9) y (5.2.13), y teniendo de antemano que el primer término de la ecuación de cantidad de movimiento (5.2.4) es lineal, se puede observar que para cada término de las ecuaciones antes mencionadas un término depende exclusivamente de las variables de referencia y los demás términos de las variables de perturbación y de referencia en forma combinada. Entonces, la ecuación (5.2.4) se puede escribir de la forma siguiente:

$$\mathcal{M}(A_j^n, Q_j^n) = \mathcal{M}(\bar{A}_j^n, \bar{Q}_j^n) + \hat{\mathcal{M}}(\bar{A}_j^n, \bar{Q}_j^n, a_j^n, q_j^n) \quad (5.2.17)$$

donde los operadores $\mathcal{L}(\bar{A}_j^n, \bar{Q}_j^n)$ y $\mathcal{M}(\bar{A}_j^n, \bar{Q}_j^n)$ satisfacen en forma exacta las ecuaciones de continuidad y cantidad de movimiento (5.1.4) y (5.1.5) para las variables de referencia, y los operadores $\mathcal{L}(a_j^n, q_j^n)$ y $\hat{\mathcal{M}}(\bar{A}_j^n, \bar{Q}_j^n, a_j^n, q_j^n)$ definen el sistema de ecuaciones de propagación de perturbaciones del esquema de Preissmann para las ecuaciones de Saint-Venant en su versión conservativa, y la presentación completa de los operadores de perturbación son:

$$\mathcal{L}(a_j^n, q_j^n) = (1 - \psi) \frac{a_j^{n+1} - a_j^n}{\Delta t} + \psi \frac{a_{j+1}^{n+1} - a_{j+1}^n}{\Delta t} + (1 - \theta) \frac{q_{j+1}^n - q_j^n}{\Delta x} + \theta \frac{q_{j+1}^{n+1} - q_j^{n+1}}{\Delta x} = 0 \quad (5.2.18)$$



$$\begin{aligned}
 \hat{M}(\bar{A}_j^n, \bar{Q}_j^n, a_j^n, q_j^n) &= (1-\psi) \frac{q_j^{n+1} - q_j^n}{\Delta t} + \psi \frac{q_{j+1}^{n+1} - q_{j+1}^n}{\Delta t} - \\
 &\frac{(1-\theta)}{\Delta x} \left[\left(\frac{\bar{Q}^2}{\bar{A}^2} \right)_{j+1}^n a_{j+1}^n - \left(\frac{\bar{Q}^2}{\bar{A}^2} \right)_j^n a_j^n \right] - \frac{\theta}{\Delta x} \left[\left(\frac{\bar{Q}^2}{\bar{A}^2} \right)_{j+1}^{n+1} a_{j+1}^{n+1} - \left(\frac{\bar{Q}^2}{\bar{A}^2} \right)_j^{n+1} a_j^{n+1} \right] + \\
 &\frac{2(1-\theta)}{\Delta x} \left[\left(\frac{\bar{Q}}{\bar{A}} \right)_{j+1}^n q_{j+1}^n - \left(\frac{\bar{Q}}{\bar{A}} \right)_j^n q_j^n \right] + \frac{2\theta}{\Delta x} \left[\left(\frac{\bar{Q}}{\bar{A}} \right)_{j+1}^{n+1} q_{j+1}^{n+1} - \left(\frac{\bar{Q}}{\bar{A}} \right)_j^{n+1} q_j^{n+1} \right] + \\
 &g \left\{ (1-\theta) \left[(1-\psi) \bar{A}_j^n + \psi \bar{A}_{j+1}^n \right] + \theta \left[(1-\psi) \bar{A}_j^{n+1} + \psi \bar{A}_{j+1}^{n+1} \right] \right\}.
 \end{aligned}
 \tag{5.2.19}$$

$$\begin{aligned}
 &\left\{ \frac{(1-\theta)}{\Delta x} \left[a_{j+1}^n \bar{h}_{A_{j+1}}^n - a_j^n \bar{h}_{A_j}^n \right] + \frac{\theta}{\Delta x} \left[a_{j+1}^{n+1} \bar{h}_{A_{j+1}}^{n+1} - a_j^{n+1} \bar{h}_{A_j}^{n+1} \right] + \right. \\
 &(1-\theta) \left[(1-\psi) a_j^n \bar{S}_{f_{A_j}}^n + \psi a_{j+1}^n \bar{S}_{f_{A_{j+1}}}^n \right] + \theta \left[(1-\psi) a_j^{n+1} \bar{S}_{f_{A_j}}^{n+1} + \psi a_{j+1}^{n+1} \bar{S}_{f_{A_{j+1}}}^{n+1} \right] + \\
 &\left. (1-\theta) \left[(1-\psi) a_j^n \bar{S}_{f_{Q_j}}^n + \psi a_{j+1}^n \bar{S}_{f_{Q_{j+1}}}^n \right] + \theta \left[(1-\psi) a_j^{n+1} \bar{S}_{f_{Q_j}}^{n+1} + \psi a_{j+1}^{n+1} \bar{S}_{f_{Q_{j+1}}}^{n+1} \right] \right\} + \\
 &g \left\{ (1-\theta) \left[(1-\psi) a_j^n + \psi a_{j+1}^n \right] + \theta \left[(1-\psi) a_j^{n+1} + \psi a_{j+1}^{n+1} \right] \right\} \\
 &\left\{ \frac{(1-\theta)}{\Delta x} \left[\bar{h}_{j+1}^n - \bar{h}_j^n \right] + \frac{\theta}{\Delta x} \left[\bar{h}_{j+1}^{n+1} - \bar{h}_j^{n+1} \right] + \right. \\
 &\left. (1-\theta) \left[(1-\psi) \bar{S}_{f_j}^n + \psi \bar{S}_{f_{j+1}}^n \right] + \theta \left[(1-\psi) \bar{S}_{f_j}^{n+1} + \psi \bar{S}_{f_{j+1}}^{n+1} \right] \right\} + O \left[\left(\|a_j^n\|_D + \|q_j^n\|_D \right)^2 \right] = 0
 \end{aligned}$$

5.3. Análisis de localización

La metodología de escalas múltiples y localización, tal como se definió en el capítulo 3, sólo se puede aplicar sobre operadores continuos, y debido a que el sistema de ecuaciones (5.2.18) y (5.2.19) es un conjunto de operadores de diferencias, aunque las variables sean continuas, a fin de cumplir con los requisitos para aplicar el análisis de escalas y localización es necesario un análisis de consistencia de los operadores discretos de $\mathcal{L}(a_j^n, q_j^n)$ y



$\hat{\mathcal{M}}(\bar{A}_j^n, \bar{Q}_j^n, a_j^n, q_j^n)$, haciendo uso de las expansiones en serie de Taylor de forma similar a lo realizado en el subcapítulo 5.1.

Entonces, sustituyendo las expansiones en serie de Taylor para cada uno de los cuatros puntos del esquema de Preissmann (ecuaciones 5.1.10-5.1.13) en los operadores discretos (ecuaciones 5.2.18 y 5.2.19), y presentado sólo términos con orden superior al lineal, se tiene :

$$\frac{\partial a}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{(1-2\theta)}{2} \Delta t \frac{\partial^2 a}{\partial t^2} - \frac{(1-2\psi)}{2} \Delta x \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + O(\Delta x^2, \Delta t^2) = 0 \quad (5.3.1)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial q}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\bar{Q}^2}{\bar{A}^2} a \right) + 2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\bar{Q}}{\bar{A}} q \right) + g \bar{A} \left[\frac{\partial(\bar{h}_{AA})}{\partial x} + \bar{S}_{f_A} a + \bar{S}_{f_Q} q \right] + g a \left(\frac{\partial \bar{h}}{\partial x} + \bar{S}_f \right) + \\ & \frac{(1-2\theta)}{2} \Delta t \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} + \frac{(1-2\psi)}{2} \Delta x \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\bar{Q}^2}{\bar{A}^2} a \right) - 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\bar{Q}}{\bar{A}} q \right) - g \left(\bar{A} \frac{\partial^2(\bar{h}_{AA})}{\partial x^2} + a \frac{\partial^2 \bar{h}}{\partial x^2} \right) \right] + \\ & O \left[\left(\| a_j^n \|_D + \| q_j^n \|_D \right)^2, \Delta x^2, \Delta t^2 \right] = 0 \end{aligned} \quad (5.3.2)$$

Otra forma de evaluar la elevación de la superficie libre del agua desde un nivel de referencia es separando el tirante y la elevación de la plantilla del fondo del canal, de manera que $\bar{h} = h(\bar{A}; x, t) = y(\bar{A}; x, t) + z_b(x)$, donde $y(\bar{A}; x, t)$ es el tirante de la sección transversal y $z_b(x)$ la elevación de la plantilla del fondo del canal. Además, si la variación de la plantilla del fondo del canal permanece constante en un tramo del canal, se puede considerar que $\partial z(x)/\partial x = -S_b$, donde S_b es la pendiente longitudinal de la plantilla del canal. Entonces, la ecuación de conservación de masa (5.3.1) y cantidad de movimiento (5.3.2) se pueden escribir de la forma siguiente:

$$\frac{\partial a}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} + O(\Delta x, \Delta t) = 0 \quad (5.3.3)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial q}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\bar{Q}^2}{\bar{A}^2} a \right) + 2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\bar{Q}}{\bar{A}} q \right) + g \bar{A} \left[\frac{\partial(\bar{h}_{AA})}{\partial x} + \bar{S}_{f_A} a + \bar{S}_{f_Q} q \right] + \\ & g a \left(\frac{\partial \bar{y}}{\partial x} + \bar{S}_f - S_b \right) + O \left[\left(\| a_j^n \|_D + \| q_j^n \|_D \right)^2, \Delta x, \Delta t \right] = 0 \end{aligned} \quad (5.3.4)$$

Con el sistema de ecuaciones (5.3.3) y (5.3.4), en este momento es posible realizar el escalamiento para conocer si cada uno de los términos de estas ecuaciones son de igual magnitud.



Entonces, considerando un punto arbitrario de referencia (x_o, t_o) en el espacio de solución Ω y alejado de la frontera $\partial\Omega$, y tomando en cuenta que las ecuaciones por escalar (5.3.3) y (5.3.4) tienen una formulación similar a las ecuaciones de perturbación (4.1.43) y (4.1.44), desarrolladas en el subcapítulo (4.1.2) y si, además, las variables de referencia cumplen con la separación de escalas (4.1.46)-(4.1.50), entonces es posible aplicar los escalamientos siguientes: para las variables de referencia, ecuaciones (4.1.54)-(4.1.58); para las variables independientes de escala lenta, ecuaciones (4.1.51)-(4.1.53) para las variables independientes de escala rápida, ecuaciones (4.1.66)-(4.1.67); para las variables de perturbación, ecuaciones (4.1.70) y (4.1.71), y para delimitar la relación entre las escalas lentas y rápidas, ecuación (4.1.69). Tomando en cuenta lo anterior, sustituyendo los escalamientos (4.1.70) y (4.1.71) en (5.3.3) y desarrollando, se tiene:

$$\frac{\varepsilon A_o}{\Lambda_t} \frac{\partial a^*}{\partial \tau} + \frac{\varepsilon Q_o}{\Lambda_x} \frac{\partial q^*}{\partial \zeta} + O(\varepsilon^2) = \frac{\partial a^*}{\partial \tau} + \frac{\partial q^*}{\partial \zeta} + O(\varepsilon) = O(1 + \varepsilon) \quad (5.3.5)$$

Para lograr un adecuado escalamiento de la ecuación de cantidad de movimiento (5.3.4) se debe desarrollar su término convectivo, de forma similar a como se manejó en el capítulo (4.1), ecuaciones (4.1.73) y (4.1.74). Entonces, la ecuación de cantidad de movimiento (5.3.4) por escalar se presenta de esta forma:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{2}{A} \left(q - \frac{\bar{Q}}{A} a \right) \left(\frac{\partial \bar{Q}}{\partial x} - \frac{\bar{Q}}{A} \frac{\partial A}{\partial x} \right) + 2 \frac{\bar{Q}}{A} \frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\bar{Q}^2}{A^2} \frac{\partial a}{\partial x} + g \bar{A} \bar{h}_A \frac{\partial a}{\partial x} + \\ & g a \left(\frac{\partial \bar{h}_A}{\partial x} + \frac{\partial \bar{y}}{\partial x} + \bar{S}_f - S_b + \bar{A} \bar{S}_{f_A} \right) + g \bar{A} q \bar{S}_{f_Q} + O\left[(\|a\| + \|q\|)^2, \Delta x, \Delta t \right] = 0 \end{aligned} \quad (5.3.6)$$

Entonces, sustituyendo las escalas (4.1.54)-(4.1.58), (4.1.70) y (4.1.71) en (5.3.6), y desarrollando

$$\begin{aligned} & \frac{\varepsilon Q_o}{\Lambda_t} \frac{\partial q^*}{\partial \tau} + \frac{2\varepsilon Q_o^2}{\mathcal{L} A_o} \frac{1}{A^*} \left(q^* - \frac{Q^*}{A^*} a^* \right) \left(\frac{\partial Q^*}{\partial X} - \frac{Q^*}{A^*} \frac{\partial A^*}{\partial X} \right) + \frac{\varepsilon Q_o^2}{\Lambda_x A_o} \left(2 \frac{Q^*}{A^*} \frac{\partial q^*}{\partial \zeta} - \frac{Q^{*2}}{A^{*2}} \frac{\partial a^*}{\partial \zeta} \right) + \\ & g \frac{\varepsilon A_o h_o}{\Lambda_x} A^* h_A^* \frac{\partial a^*}{\partial \zeta} + g \varepsilon A_o a^* \left(\frac{h_o}{\mathcal{L}} A^* \frac{\partial h_A^*}{\partial X} + \frac{y_o}{\mathcal{L}} \frac{\partial y^*}{\partial X} + S_{f_o} S_f^* - S_o S_b^* + S_{f_o} A^* S_{f_A}^* \right) + \\ & g \varepsilon A_o S_{f_o} g A^* q^* S_{f_Q}^* + O(\varepsilon^2) = 0 \end{aligned} \quad (5.3.7)$$

o, también



$$\begin{aligned} & \frac{\partial q^*}{\partial \tau} + 2\varepsilon \frac{1}{A^*} \left(q^* - \frac{Q^*}{A^*} a^* \right) \left(\frac{\partial Q^*}{\partial X} - \frac{Q^*}{A^*} \frac{\partial A^*}{\partial X} \right) + \left(2 \frac{Q^*}{A^*} \frac{\partial q^*}{\partial \zeta} - \frac{Q^{*2}}{A^{*2}} \frac{\partial a^*}{\partial \zeta} \right) + \\ & g \frac{h_o}{U_o^2} A^* h_A^* \frac{\partial a^*}{\partial \zeta} + g \varepsilon \frac{h_o}{U_o^2} \left(A^* \frac{\partial h_A^*}{\partial X} + \frac{y_o}{h_o} \frac{\partial y^*}{\partial X} \right) + g \frac{\varepsilon \mathcal{L}}{U_o^2} a^* (S_{f_o}^* S_f^* - S_o S_b^*) + \\ & g \frac{\varepsilon \mathcal{L}}{U_o^2} S_{f_o}^* A^* [a^* S_{f_A}^* + q^* S_{f_o}^*] + O(\varepsilon) = 0 \end{aligned} \quad (5.3.8)$$

En la expresión anterior se observa que $y_o/h_o = O(1)$ (ecuación 4.1.62); $g h_o/U_o^2 = F_r^{-2} = O(1)$; la relación entre el término de fricción y la plantilla del canal para un flujo con tendencia a la normalización presenta un comportamiento $g(\varepsilon \mathcal{L}/U_o^2)(S_{f_o}^* - S_o) = O(\varepsilon)$ (ecuación 4.1.80). Por tanto, la ecuación (5.3.8) se escribe de la forma siguiente:

$$\frac{\partial q^*}{\partial \tau} + 2 \frac{Q^*}{A^*} \frac{\partial q^*}{\partial \zeta} - \frac{Q^{*2}}{A^{*2}} \frac{\partial a^*}{\partial \zeta} + g \frac{h_o}{U_o^2} A^* h_A^* \frac{\partial a^*}{\partial \zeta} + g \frac{\varepsilon}{\delta} S_{f_o}^* A^* [a^* S_{f_A}^* + q^* S_{f_o}^*] + O(\varepsilon) = 0 \quad (5.3.9)$$

El sistema escalado (5.3.5) y (5.3.9) es igual al sistema que resultó de un escalamiento similar para el sistema continuo (4.1.72) y (4.1.81) (subcapítulo 4.1.2). Entonces, al aplicar el análisis de localización sobre el sistema (5.3.5) y (5.3.9) se tendrá el mismo resultado que se obtuvo del mismo tipo de análisis en el subcapítulo 4.1.3, por lo que el sistema de ecuaciones localizadas en su versión dimensional es

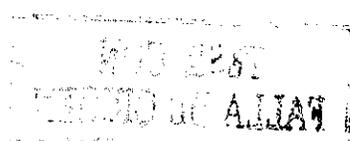
$$\frac{\partial a}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \quad (5.3.10)$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} + 2U_o \frac{\partial q}{\partial x} - U_o^2 \frac{\partial a}{\partial x} + g \frac{h_o}{U_o^2} A_o h_{A_o} \frac{\partial a}{\partial x} + g A_o [a S_{f_{A_o}} + q S_{f_{Q_o}}] = 0 \quad (5.3.11)$$

Recordándose además que el resultado principal de aplicar el análisis de escalas múltiples y localización al sistema de ecuaciones (5.3.3) y (5.3.4) es la transformación del problema original, que es de valor inicial no lineal con coeficientes variables, por un problema de valor inicial puro lineal de coeficientes constantes.

Considerando una forma alterna de trabajar los coeficientes de los términos de fricción en la ecuación de cantidad de movimiento (5.3.11) por medio de las relaciones (4.1.98) – (4.1.100) definidas en el subcapítulo 4.1.2, entonces:

$$\frac{\partial q}{\partial t} + 2U_o \frac{\partial q}{\partial x} - U_o^2 (1 - F_r^{-2}) \frac{\partial a}{\partial x} + F_1 a + F_2 q = 0 \quad (5.3.12)$$





Retomando la propuesta de discretización de Preissmann en el sistema de ecuaciones localizadas (5.3.10) y (5.3.12), al substituir los operadores de derivada temporal, espacial y de términos independientes, ecuaciones (5.1.1)-(5.1.3), se genera un sistema de ecuaciones discretas en diferencias finitas lineal de coeficientes constantes como se muestra a continuación:

$$(1-\psi)\frac{a_j^{n+1}-a_j^n}{\Delta t} + \psi\frac{a_{j+1}^{n+1}-a_{j+1}^n}{\Delta t} + (1-\theta)\frac{q_{j+1}^n-q_j^n}{\Delta x} + \theta\frac{q_{j+1}^{n+1}-q_j^{n+1}}{\Delta x} = 0 \quad (5.3.13)$$

$$\begin{aligned} & \frac{(1-\psi)}{\Delta t}[q_j^{n+1}-q_j^n] + \frac{\psi}{\Delta t}[q_{j+1}^{n+1}-q_{j+1}^n] - 2U_o\frac{(1-\theta)}{\Delta x}[q_{j+1}^n-q_j^n] + 2U_o\frac{\theta}{\Delta x}[q_{j+1}^{n+1}-q_j^{n+1}] - \\ & U_o^2(1-F_r^{-2})\frac{(1-\theta)}{\Delta x}[a_{j+1}^n-a_j^n] - U_o^2(1-F_r^{-2})\frac{\theta}{\Delta x}[a_{j+1}^{n+1}-a_j^{n+1}] + \end{aligned} \quad (5.3.14)$$

$$F_1 \left\{ (1-\theta)[(1-\psi)a_j^n + \psi a_{j+1}^n] + \theta[(1-\psi)a_j^{n+1} + \psi a_{j+1}^{n+1}] \right\} +$$

$$F_2 \left\{ (1-\theta)[(1-\psi)q_j^n + \psi q_{j+1}^n] + \theta[(1-\psi)q_j^{n+1} + \psi q_{j+1}^{n+1}] \right\} = 0$$

5.4. Análisis de estabilidad

Dado que el sistema escalado de diferencias (5.3.13) y (5.3.14) es lineal de coeficientes constantes, entonces este sistema se puede solucionar aplicando una expansión en serie discreta de Fourier, de la forma como se definió en (3.4.54), por lo que las componentes discretas de Fourier para las variables de perturbación se definen a continuación:

$$a_j^n = a(j\Delta x, n\Delta t; m) = \hat{a}(k)\rho_m^n e^{ikj\Delta x} \quad (5.4.1)$$

$$q_j^n = q(j\Delta x, n\Delta t; m) = \hat{q}(k)\rho_m^n e^{ikj\Delta x} \quad (5.4.2)$$

donde ρ_m^n , es el factor de amplificación del m -ésimo modo de Fourier y k el número de onda.

Sustituyendo las componentes de Fourier (5.4.1) y (5.4.2), para un modo arbitrario de Fourier, en el sistema de ecuaciones discretas (5.3.13) y (5.3.14) se tiene

$$\rho^n e^{ikj\Delta x} \left\{ \hat{a} \left[\frac{(1-\psi)}{\Delta t}(\rho-1) + \frac{\psi}{\Delta t}e^{ik\Delta x}(\rho-1) \right] + \hat{q} \left[\frac{(1-\theta)}{\Delta x}(e^{ik\Delta x}-1) + \frac{\theta}{\Delta x}\rho(e^{ik\Delta x}-1) \right] \right\} = 0 \quad (5.4.3)$$



$$\begin{aligned} \rho^n e^{ikj\Delta x} \left\{ \hat{a} \left[-U_o^2(1-F_r^{-2}) \left[\frac{(1-\theta)}{\Delta x} (e^{ik\Delta x} - 1) + \frac{\theta}{\Delta x} \rho (e^{ik\Delta x} - 1) \right] + \right. \right. \\ \left. \left. F_1 \left[(1-\theta)(1-\psi + \psi e^{ik\Delta x}) + \theta \rho (1-\psi + \psi e^{ik\Delta x}) \right] \right] + \right. \\ \left. \hat{q} \left[\frac{(1-\psi)}{\Delta t} (\rho - 1) + \frac{\psi}{\Delta t} e^{ik\Delta x} (\rho - 1) + 2U_o \left[\frac{(1-\theta)}{\Delta x} (e^{ik\Delta x} - 1) + \frac{\theta}{\Delta x} \rho (e^{ik\Delta x} - 1) \right] + \right. \right. \\ \left. \left. F_2 \left[(1-\theta)(1-\psi + \psi e^{ik\Delta x}) + \theta \rho (1-\psi + \psi e^{ik\Delta x}) \right] \right] \right\} = 0 \end{aligned} \quad (5.4.4)$$

Considerando una forma alternativa de representar los términos exponenciales tal que:

$$e^{ik\Delta x} + 1 = 2e^{ik\Delta x/2} \cos(k\Delta x/2) \quad (5.4.5)$$

$$e^{ik\Delta x} - 1 = 2ie^{ik\Delta x/2} \sen(k\Delta x/2) \quad (5.4.6)$$

Sea $c \equiv \cos(k\Delta x/2)$, $s \equiv \sen(k\Delta x/2)$ y $\lambda \equiv \Delta t/\Delta x$, entonces:

$$\rho^n e^{ikj\Delta x} \{ \hat{a}(\rho - 1)[c + (2\psi - 1)is] + \hat{q}2i\lambda s(1 - \theta + \theta\rho) \} = 0 \quad (5.4.7)$$

$$\rho^n e^{ikj\Delta x} \left\{ \hat{a} \left[-2iU_o^2(1-F_r^{-2})\lambda s(1 - \theta + \theta\rho) + F_1\Delta t(1 - \theta + \theta\rho)[c + (2\psi - 1)is] \right] + \right. \\ \left. \hat{q} \left[(\rho - 1)[c + (2\psi - 1)is] + 4iU_o\lambda s(1 - \theta + \theta\rho) + F_2\Delta t(1 - \theta + \theta\rho)[c + (2\psi - 1)is] \right] \right\} = 0 \quad (5.4.8)$$

y, ordenando (5.4.7) y (5.4.8) en forma matricial:

$$\rho^n e^{ikj\Delta x} \begin{bmatrix} (\rho - 1)[c + (2\psi - 1)is] & 2i\lambda s(1 - \theta + \theta\rho) \\ -2iU_o^2(1-F_r^{-2})\lambda s(1 - \theta + \theta\rho) & (\rho - 1)[c + (2\psi - 1)is] \\ + F_1\Delta t(1 - \theta + \theta\rho)[c + (2\psi - 1)is] & + 4iU_o\lambda s(1 - \theta + \theta\rho) \\ & + F_2\Delta t(1 - \theta + \theta\rho)[c + (2\psi - 1)is] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.4.9)$$

Utilizando el parámetro de simplificación matricial κ propuesto por Morton (Samuels y Skeels, 1990)

$$\kappa = \frac{(\rho - 1)[c + (2\psi - 1)is]i}{2\lambda s(1 - \theta + \theta\rho)} \quad (5.4.10)$$

y reagrupando el sistema matricial (5.4.9) con base en parámetro de simplificación (5.4.10)

$$\rho^n e^{ikj\Delta x} \begin{bmatrix} \kappa & -1 \\ U_o^2(1-F_r^{-2}) & \kappa - 2U_o \\ + \frac{iF_1\Delta t[c + (2\psi - 1)is]}{2\lambda s} & + \frac{iF_2\Delta t[c + (2\psi - 1)is]}{2\lambda s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.4.11)$$

Entonces extrayendo el determinante de coeficientes e igualando a cero





$$\kappa^2 - \kappa \left[2U_o - \frac{iF_2 \Delta t [c + (2\psi - 1)is]}{2\lambda s} \right] + U_o^2 (1 - F_r^{-2}) + \frac{iF_1 \Delta t [c + (2\psi - 1)is]}{2\lambda s} = 0 \quad (5.4.12)$$

Por otra parte, tomando los valores de F_1 y F_2 de las ecuaciones (4.1.99) y (4.1.100), y desarrollando, se tiene:

$$F_1 = gA_o \frac{dS_f}{dA} \Big|_o = -2\alpha \left(\frac{K_s}{R_o} \right)^{1/3} \frac{|Q_o| Q_o}{R_o A_o} \left(\frac{1}{A_o} + \frac{2}{3} \frac{1}{R_o} \frac{dR}{dA} \Big|_o \right) = -2gS_{f_o} \left(1 + \frac{V_e}{F_r} \right) \quad (5.4.13)$$

$$F_2 = gA_o \frac{dS_f}{dQ} \Big|_o = 2\alpha \left(\frac{K_s}{R_o} \right)^{1/3} \frac{|Q_o|}{R_o A_o} = \frac{2gS_{f_o}}{U_o} \quad (5.4.14)$$

Sustituyendo las ecuaciones (5.4.13) y (5.4.14) en (5.4.12) y considerando la definición del parámetro de fricción $I \equiv gS_{f_o} \Delta t$ se obtiene:

$$\kappa^2 - \kappa \left[2U_o - \frac{i[c + (2\psi - 1)is]I}{U_o \lambda s} \right] + U_o^2 (1 - F_r^{-2}) - \frac{i[c + (2\psi - 1)is]I}{\lambda s} \left(1 + \frac{V_e}{F_r} \right) = 0 \quad (5.4.15)$$

así, la relación de dispersión para de (5.4.11) es

$$\kappa = U_o - \frac{i[c + (2\psi - 1)is]I}{2U_o \lambda s} \pm \sqrt{gD_o + \frac{i[c + (2\psi - 1)is]IV_e}{\lambda s F_r} - \left[\frac{[c + (2\psi - 1)is]I}{2U_o \lambda s} \right]^2} \quad (5.4.16)$$

A fin de determinar el comportamiento de la variable κ en la propagación de perturbaciones, sabiendo que κ es una variable compleja, y dejando la ecuación (5.4.10) en función de ρ , se tiene:

$$\rho = \frac{c + (2\psi - 1)is - 2i\lambda s \kappa (1 - \theta)}{c + (2\psi - 1)is + 2i\lambda s \kappa \theta} \quad (5.4.17)$$

La condición de estabilidad estricta del esquema en diferencias se cumple para un valor de $|\rho| \leq 1$. Aplicando esta condición límite de propagación a la ecuación (5.4.17) resulta en:

$$|\rho| = \frac{|c + (2\psi - 1)is - 2i\lambda s \kappa (1 - \theta)|}{|c + (2\psi - 1)is + 2i\lambda s \kappa \theta|} \leq 1 \quad (5.4.18)$$

Dado que κ se puede separar en una parte real e imaginaria, de forma que $\kappa = \text{Re}(\kappa) + i\text{Im}(\kappa)$, por lo que de (5.4.18) se obtiene la siguiente relación

$$\text{Im}(\kappa \lambda s c) \leq \lambda^2 s^2 |\kappa|^2 (2\theta - 1) + \lambda s^2 \text{Re}(\kappa) (2\psi - 1) \quad (5.4.19)$$

La ecuación anterior, en vista de la complejidad que introducen las expresiones (5.4.10) y (5.4.16), implica que resulte muy difícil establecer una desigualdad explícita para expresar la condición de estabilidad en términos de los parámetros de discretización Δt , Δx , θ y ψ . Por lo anterior, a partir de este momento se buscará un conjunto de condiciones de estabilidad suficientes que



generalicen la condición de estabilidad del esquema para cualquier condición de flujo. En términos matemáticos, la consideración anterior, se puede expresar a través de la siguiente desigualdad, que considera la combinación más desfavorable en términos de la estabilidad del esquema:

$$\max_k \operatorname{Im}(\kappa \lambda s c) \leq \min_k \left[\lambda^2 s^2 |\kappa|^2 (2\theta - 1) + \lambda s^2 \operatorname{Re}(\kappa) (2\psi - 1) \right] \equiv \aleph \quad (5.4.20)$$

Con el objeto de simplificar el análisis, considérese ahora dos posibilidades $\aleph \leq 0$ y $\aleph > 0$. Analizando primeramente la posibilidad $\aleph < 0$, la ecuación (5.4.20) se cumplirá si $\max_k \operatorname{Im}(\kappa \lambda s c) \leq 0$.

Por otra parte, reordenando la relación de dispersión (5.4.16) de manera de extraer el término $\operatorname{Im}(\kappa \lambda s c)$, se tiene que:

$$\operatorname{Im}(\kappa \lambda s c) = -\frac{c^2 I}{2U_o} \pm c \operatorname{Im} \left[gD_o \lambda^2 s^2 + i [c + (2\psi - 1) i s] \lambda s \frac{IV_e}{F_r} - \left[\frac{[c + (2\psi - 1) i s] I}{2U_o} \right]^2 \right] \quad (5.4.21)$$

Sustituyendo la condición $\max_k \operatorname{Im}(\kappa \lambda s c) \leq 0$ en (5.4.21) se llega a:

$$-\frac{c^2 I}{2U_o} \pm c \operatorname{Im} \left[gD_o \lambda^2 s^2 + i [c + (2\psi - 1) i s] \lambda s \frac{IV_e}{F_r} - \left[\frac{[c + (2\psi - 1) i s] I}{2U_o} \right]^2 \right] \leq 0 \quad ; \quad \forall k \quad (5.4.22)$$

Tomando en cuenta las siguientes variables simplificatorias:

$$\chi = \frac{2U_o^2 \lambda s}{c I F_r} \quad (5.4.23)$$

$$\xi = \frac{(2\psi - 1) s}{c} \quad (5.4.24)$$

y sustituyendo (5.4.23) y (5.4.24) en (5.4.22)

$$\operatorname{Im} \left[\left(\chi^2 + 2\chi\xi V_e + \xi^2 - 1 \right) + 2i(\chi V_e - \xi) \right]^{1/2} \leq 1 \quad (5.4.25)$$

Además, extrayendo la parte imaginaria de la ecuación (5.4.25)

$$\operatorname{sgn}(\chi V_e - \xi) \sqrt{\frac{1}{2} \left\{ \left[4(\chi V_e - \xi)^2 + \left(\chi^2 + 2\chi\xi V_e + \xi^2 - 1 \right)^2 \right]^{1/2} - \chi^2 - 2\chi\xi V_e - \xi^2 + 1 \right\}} \leq 1 \quad (5.4.26)$$

En la ecuación anterior la condición más desfavorable se presenta para $\operatorname{sgn}(\chi V_e - \xi) > 0$. Entonces, de la ecuación (5.4.26), tenemos:

$$|V_e| \leq 1 \quad ; \quad \forall k \quad (5.4.27)$$

Esto constituye una condición de estabilidad suficiente del esquema de Preissmann aplicado a las ecuaciones de Saint-Venant conservativas para



$\max_k \text{Im}(\kappa \lambda_{sc}) \leq 0$. Por construcción, (5.4.27) automáticamente implica, con creces, la satisfacción de (5.4.20) para $\varkappa > 0$. No obstante, la condición definida por (5.4.27) no indica la influencia que pueden tener los factores de peso ψ y θ en la estabilidad del esquema. Entonces, analizando la condición de estabilidad de suficiencia en la parte derecha de la desigualdad (5.4.20) para el caso $\varkappa \geq 0$, se tiene:

$$\frac{(2\psi - 1)}{\lambda \text{Re}(\kappa)} + \left[1 + \frac{\text{Im}^2(\kappa)}{\text{Re}^2(\kappa)} \right] (2\theta - 1) > 0 \quad ; \quad \forall k \quad (5.4.28)$$

En la relación anterior se puede hacer notar que el esquema es estable para $\psi = 1/2$, $\theta \geq 1/2$. Si se tiene la condición de $\theta < 1/2$, la ecuación (5.4.28) se puede escribir de la forma siguiente:

$$\Delta t < \frac{(1/2 - \psi)\Delta x}{\text{Re}(\kappa) \left[1 + \frac{\text{Im}^2(\kappa)}{\text{Re}^2(\kappa)} \right] (2\theta - 1)} \quad ; \quad \forall k \quad (5.4.29)$$

En efecto, se puede demostrar que una de las raíces de κ , $(\kappa)_{(+)}$ tiene el siguiente límite, $\lim_{k\Delta x \rightarrow 0} \text{Im}(\kappa)_{(+)} \rightarrow -\infty$, para esta condición el esquema es incondicionalmente inestable, y que para el caso más desfavorable se presenta para $k\Delta x \rightarrow 0$, lo cual implicaría que el esquema sería estable para $\Delta t < 0$ e inestable para $\Delta t \geq 0$ (Véase Anexo A, ecuación A.21).

Ahora bien, si $\theta \geq 1/2$, se pueden analizar dos posibilidades:

- a) Para el límite de $k\Delta x \rightarrow 0$, si para la parte imaginaria de κ se toma el signo positivo del radical; se tiene que $\lim_{k\Delta x \rightarrow 0} \text{Im}(\kappa)_{(+)} \rightarrow -\infty$. Entonces, (5.4.28) se cumplirá siempre, ya que $\text{Re}(\kappa) \neq 0$ (véase ecuaciones A.15, A.17 y A.21 del Anexo A). Por lo tanto, en este caso, el esquema es estable.
- b) Si la parte imaginaria κ toma la raíz correspondiente al valor negativo del radical $\lim_{k\Delta x \rightarrow 0} \text{Im}(\kappa)_{(-)} \rightarrow 0$ y realizando una combinación de las soluciones para la parte real de κ (anexo A, ecuaciones A.15 y A.17), se tiene que:

para la raíz positiva de la parte real de κ :

$$\frac{\psi - 1/2}{C_{r(+)}} + (\theta - 1/2) \geq 0 \quad (5.4.30)$$

para la raíz negativa de la parte real de κ :

$$C_{r(-)} + \frac{\psi - 1/2}{U_o} + (\theta - 1/2) \geq 0 \quad (5.4.31)$$



donde C_r es el número de Courant.

Entonces, las inecuaciones (5.4.30) y (5.4.31) indican la condición de estabilidad del esquema de Preissmann en función de los valores de θ y ψ , este resultado es una condición de estabilidad condicional influida por las condiciones de flujo. Por tanto, si se desea que el esquema sea estable independientemente de la condiciones de flujo, las condiciones de estabilidad en términos de ψ y θ , son:

$$\psi = \frac{1}{2} \tag{5.4.32}$$

$$\theta \geq \frac{1}{2} \tag{5.4.33}$$

Es importante mencionar que la condición de estabilidad independiente de las características del flujo se tiene para $\lim_{k\Delta x \rightarrow 0} \text{Im}(\kappa)_{(+)} \rightarrow -\infty$, $\psi = 1/2$ y $\theta \geq 1/2$.

Adicionalmente, la relación (5.4.31) es similar a la reportada por Lyn y Goodwin (1987), este resultado se ha reportado en la literatura (Abbott, 1979; Lyn y Goodwin, 1987; Samuels y Skeels, 1990), por lo que el único caso que mantiene una condición de estabilidad es para $\psi = 1/2$ y $\theta \geq 1/2$.

Entonces, se puede concluir que el segundo término de la izquierda de la ecuación (5.4.20) introduce una condición de estabilidad condicional del esquema de Preissmann y que es delimitada por la condición de flujo, este tipo de resultado fue determinado en forma experimental en la publicación de Lyn y Goodwin (1987), pero no fue demostrado por estos autores, adicionalmente en el subcapítulo 5.5 se puede observar este resultado de estabilidad condicional en las láminas (5.15 - 5.25), en donde se tiene la graficación $\max_k |\rho|$ de la relación de dispersión (5.4.17) para diferentes condiciones de flujo y diferentes valores de ψ , θ y $|V_e| \leq 1$, con lo cual se confirma en forma analítica y experimental que la única línea de estabilidad incondicional del plano $\psi, \theta \in [1,0]$ se tiene para $\psi = 1/2$ y $\theta \geq 1/2$.

Finalmente, como resultado del análisis de propagación de perturbaciones, escalas múltiples, localización y aplicación del método de Fourier, del esquema de Preissmann (5.1.1)-(5.1.3) aplicado a las ecuaciones de Saint-Venant en su versión integral (2.3.46), (2.3.47) o diferencial (2.3.52), (2.3.53), la condición de estabilidad se puede enunciar en el siguiente teorema:

Teorema 5.2. *Sea el esquema de Preissmann (5.3.13)-(5.3.14) aplicado a las ecuaciones de Saint-Venant en su versión integrodiferencial (2.3.46), (2.3.47), o*



diferencial (2.3.52), (2.3.53), dado que se tiene una aproximación consistente en diferencias (Teorema 5.1), este esquema es convergente en el sentido del Teorema 3.1 "Equivalente de Lax" para las condiciones de estabilidad incondicional $|V_e| \leq 1$, $\psi = 1/2$ y $\theta \geq 1/2$.

Demostración: Una vez determinada la condición de estabilidad incondicional tanto para la condición $|V_e| \leq 1$ (5.4.27) como para los factores de peso $\psi = 1/2$ y $\theta \geq 1/2$ y demostrado que el sistema es consistente (teorema 5.1) se demuestra que bajo estos parámetros el esquema es convergente cuando se tiene un refinamiento de la malla $\Delta x, \Delta t \rightarrow 0$, debido a que los límites de estabilidad no dependen de la configuración de ésta. ■

También se puede hacer notar como resultado importante de este estudio de estabilidad, dado que el teorema de Equivalencia de Lax se propone para un problema evolutivo lineal bien planteado; en este caso se ha logrado ampliar la aplicación de este teorema a un problema evolutivo no lineal bien planteado, como resultado del análisis de escalas múltiples y de localización.

Para confirmar la validez de los resultados obtenidos, en el subcapítulo 5.8.3 se presentará una serie de pruebas numéricas para diferentes condiciones de flujo, lo cual permitirá comprobar la bondad de esta metodología.

5.5. Retratos de amplitud y fase

Para la graficación de los retratos de amplitud y fase de la relación de dispersión del esquema de Preissmann (ecuación 5.4.17), y con el fin de tener una secuencia rápida de localización de cada gráfica, se propone la siguiente clasificación:

a) Retratos de amplitud que tienen una semejanza con las condiciones de flujo de las que se hará uso en las pruebas numéricas en el subcapítulo 5.8.2.

a.1) Condición de flujo subcrítico:

Las condiciones topológicas y flujo subcrítico de todas las pruebas numéricas a lo largo del documento se muestran en la tabla 5.1.



Parámetro	Valor considerado
Gasto [$Q_0 = Q(x,0)$] en (m^3/s)	300
Ancho de la base del canal [b] en (m)	200
Talud de la pared del canal [ak] (<i>adim.</i>)	4
Rugosidad de Manning [n]	0.025
Longitud del canal [L] en (m)	25000
Discretización espacial [Δx] en (m)	62.5
Tirante normal [y_n] en (m)	2.19187
Tirante crítico [y_c] en (m)	0.60962
Número de Froude [F_r] (<i>adim.</i>)	0.14431
Número de Vedernikov [V_e] (<i>adim.</i>)	0.09619

Tabla 5.1. Condiciones topológicas y de flujo subcrítico.

Para tener un mejor manejo de las láminas se propone la siguiente secuencia de presentación (tabla 5.2), en donde para cada retrato de amplitud se consideran los números de Courant $C_r = \{0.01, 0.11, 2, 5, 10, 30, 50, 75, 150\}$.

Nombre de identificación del retrato de amplitud	Valores de los factores de Peso	
	θ	ψ
Ret_amp_Fs01Pr	0.5	0.5
Ret_amp_Fs02Pr	0.6	0.5
Ret_amp_Fs03Pr	0.7	0.5
Ret_amp_Fs04Pr	0.8	0.5
Ret_amp_Fs05Pr	0.9	0.5
Ret_amp_Fs06Pr	1.0	0.5

Tabla 5.2. Clasificación de los retratos de amplitud para flujo subcrítico del esquema de Preissmann.

a.2) Condición de flujo supercrítico

En el caso de flujo supercrítico las condiciones topológicas y de flujo para todas las pruebas desarrolladas en el documento se puede consultar en la tabla 5.3. Los datos de identificación de los retratos de flujo supercrítico se indican en la tabla 5.4.



Parámetro	Valor considerado
Gasto [$Q_0 = Q(x,0)$] en (m^3/s)	300
Ancho de la base del canal [b] en (m)	200
Talud de la pared del canal [ak] (<i>adim.</i>)	4
Rugosidad de Manning [n]	0.025
Longitud del canal [L] en (m)	25000
Discretización espacial [Δx] en (m)	62.5
Tirante normal [y_n] en (m)	0.49071
Tirante crítico [y_c] en (m)	0.60962
Número de Froude [F_r] (<i>adim.</i>)	1.38634
Número de Vedernikov [V_e] (<i>adim.</i>)	0.90607

Tabla 5.3. Condiciones topológicas y de flujo supercrítico.

Nombre de identificación del retrato de amplitud	Valores de los factores de Peso	
	θ	ψ
Ret_amp_Ft01Pr	0.5	0.5
Ret_amp_Ft02Pr	0.6	0.5
Ret_amp_Ft03Pr	0.7	0.5
Ret_amp_Ft04Pr	0.8	0.5
Ret_amp_Ft05Pr	0.9	0.5
Ret_amp_Ft06Pr	1.0	0.5

Tabla 5.4. Clasificación de los retratos de amplitud para flujo supercrítico del esquema de Preissmann.

b) Generación de los planos de iso-estabilidad para la condición $\max(\rho)$ de la relación de dispersión (5.4.17) y para diferentes valores de los factores de peso espacial y temporal en el rango $\theta \in [0,1]$ y $\psi \in [0,1]$, determinado para las siguientes condición de flujo:

Gasto (Q)	= 1.0 m^3/s
Ancho de la base (b)	= 1.0 m
Talud (ak)	= 0
Rugosidad de Manning (n)	= 0.025

A fin de identificar el tipo de plano de iso-estabilidad para cada tipo de simulación se tiene la tabla 5.5 de identificación, en donde se modificó solamente la pendiente de fricción para buscar las condiciones de flujo, ya sea de cambio de régimen o de la condición de estabilidad límite ($|V_e| \leq 1$).



Nombre de la Prueba	Valor del número de Froude F_r	Valor del número de Vedernikov V_e
máx_ρ_01	0.0988	0.0173
máx_ρ_02	0.9362	0.3168
máx_ρ_03	0.9888	0.3346
máx_ρ_04	1.0142	0.3511
máx_ρ_05	1.0872	0.3848
máx_ρ_06	1.5701	0.6188
max_ρ_07	2.3042	1.0001
max_ρ_08	2.3150	1.0068
max_ρ_09	3.2458	1.5173

Tabla 5.5. Clasificación de las pruebas de iso-estabilidad del esquema de Preissmann.

c) En las láminas de la relación entre la fase numérica (relación de dispersión 5.4.17) y la fase continua (relación de dispersión 4.1.108), se presentarán los resultados considerando exclusivamente para las condiciones de flujo en que se realizaron las pruebas numéricas, las cuales quedan definidas en las tablas 5.4. y 5.5.

c.1) Condición de flujo subcrítico

Tomando los valores topológicos y de flujo de la tabla 5.1 y para tener un mejor manejo de las láminas de los retratos de fase se propone la siguiente secuencia de presentación (tabla 5.5), en donde para cada retrato de fase se consideran los números de Courant $C_r = \{0.001, 0.01, 0.1, 1, 2, 5, 10, 30, 50, 75, 150\}$:

Nombre de identificación del retrato de amplitud	Valores de los factores de Peso	
	θ	ψ
Ret_fas_Fs01Pr	0.5	0.5
Ret_fas_Fs02Pr	0.6	0.5
Ret_fas_Fs03Pr	0.7	0.5
Ret_fas_Fs04Pr	0.8	0.5
Ret_fas_Fs05Pr	0.9	0.5
Ret_fas_Fs06Pr	1.0	0.5

Tabla 5.6. Clasificación de los retratos de fase para flujo subcrítico del esquema de Preissmann.



c.2) Condición de flujo supercrítico

La secuencia de clasificación de los retratos de fase supercrítico se muestra en la tabla 5.7, tomando en cuenta los datos de topología y flujo de la tabla 5.3.

Nombre de identificación del retrato de amplitud	Valores de los factores de Peso	
	θ	ψ
Ret_fas_Ft01Pr	0.5	0.5
Ret_fas_Ft02Pr	0.6	0.5
Ret_fas_Ft03Pr	0.7	0.5
Ret_fas_Ft04Pr	0.8	0.5
Ret_fas_Ft05Pr	0.9	0.5
Ret_fas_Ft06Pr	1.0	0.5

Tabla 5.7. Clasificación de los retratos de fase para flujo supercrítico esquema de Preissmann.

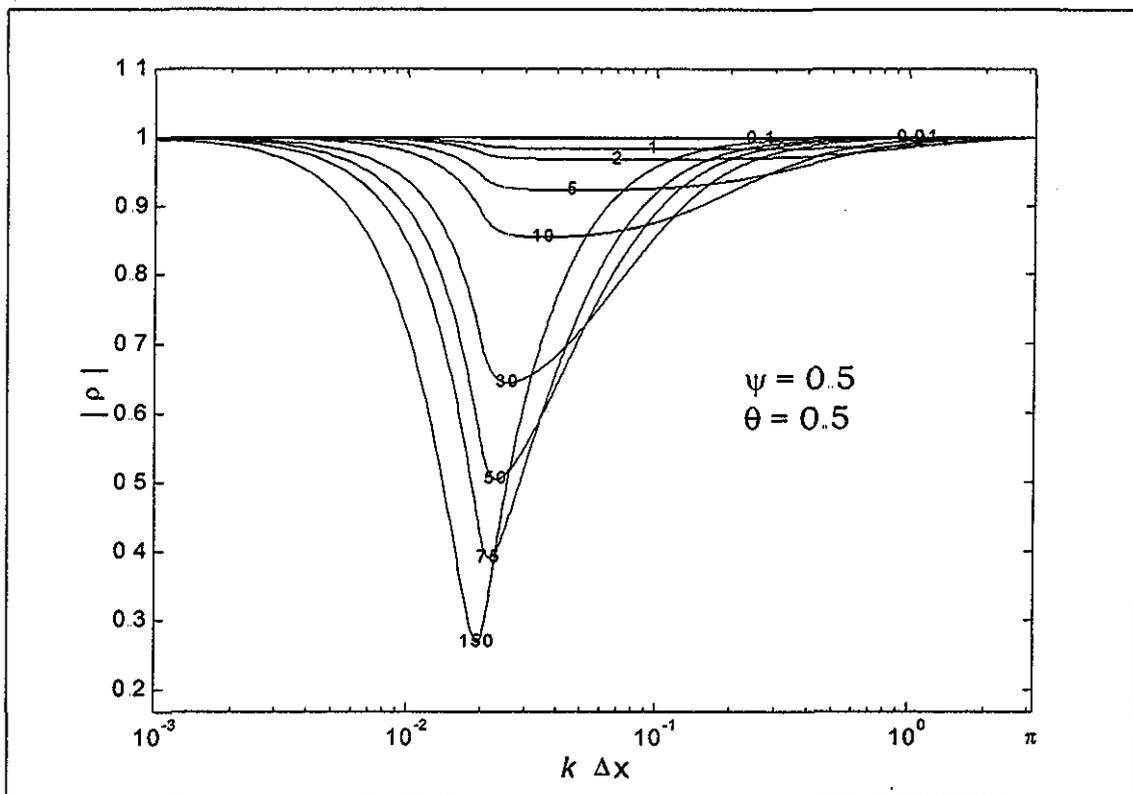


Lámina 5.2. Caso Ret_amp_Fs01Pr.

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

100 27/11
15/03/2010 10:41 AM

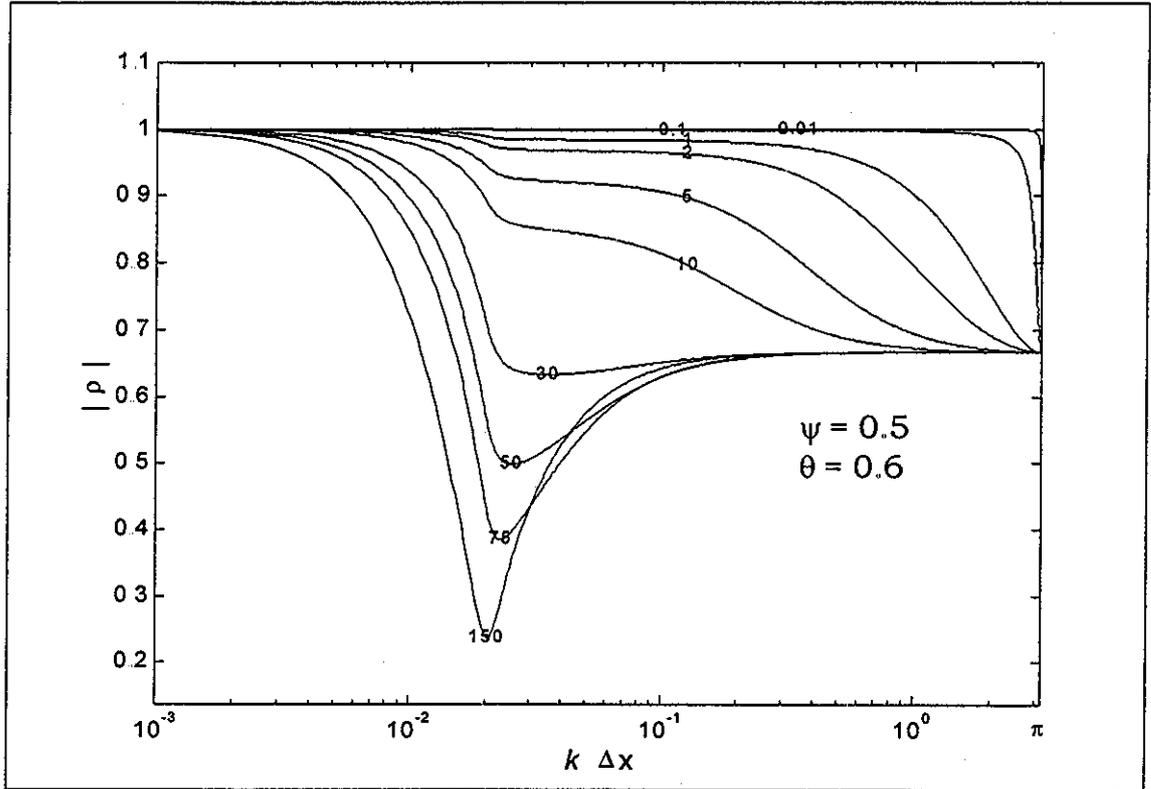


Lámina 5.3. Caso Ret_amp_Fs02Pr.

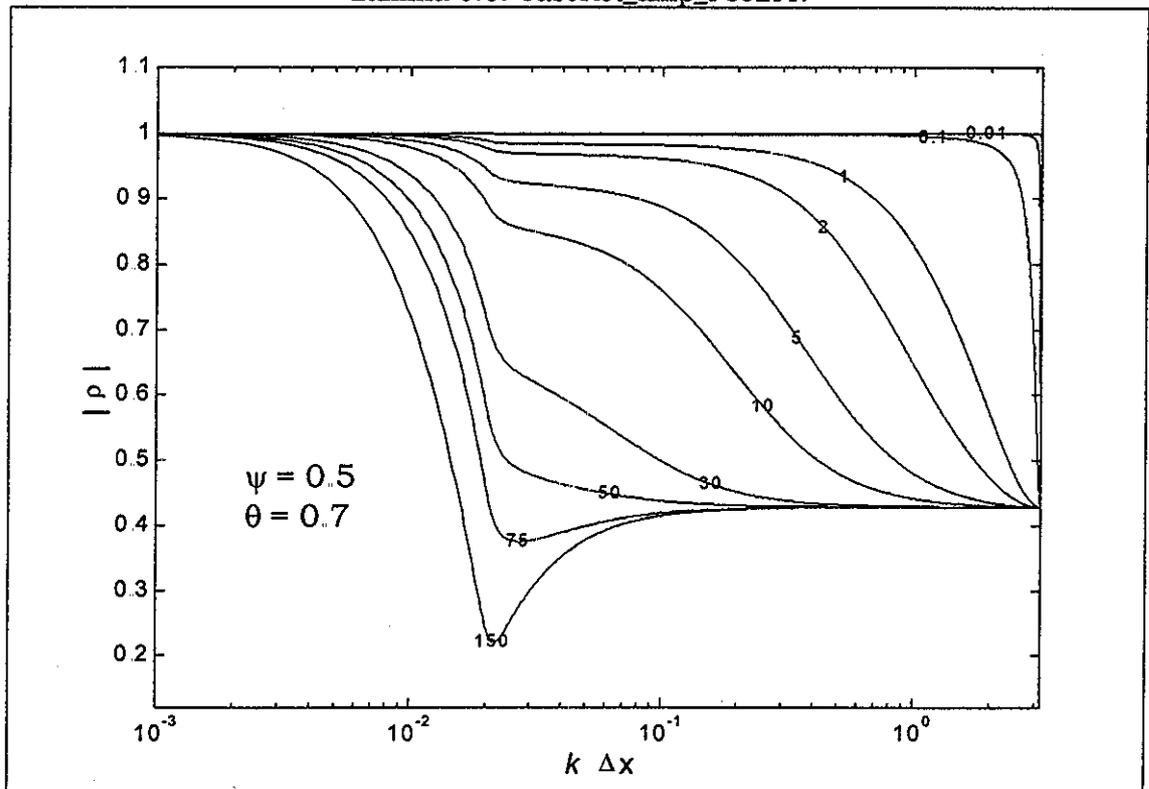


Lámina 5.4. Caso Ret_amp_Fs03Pr.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

π

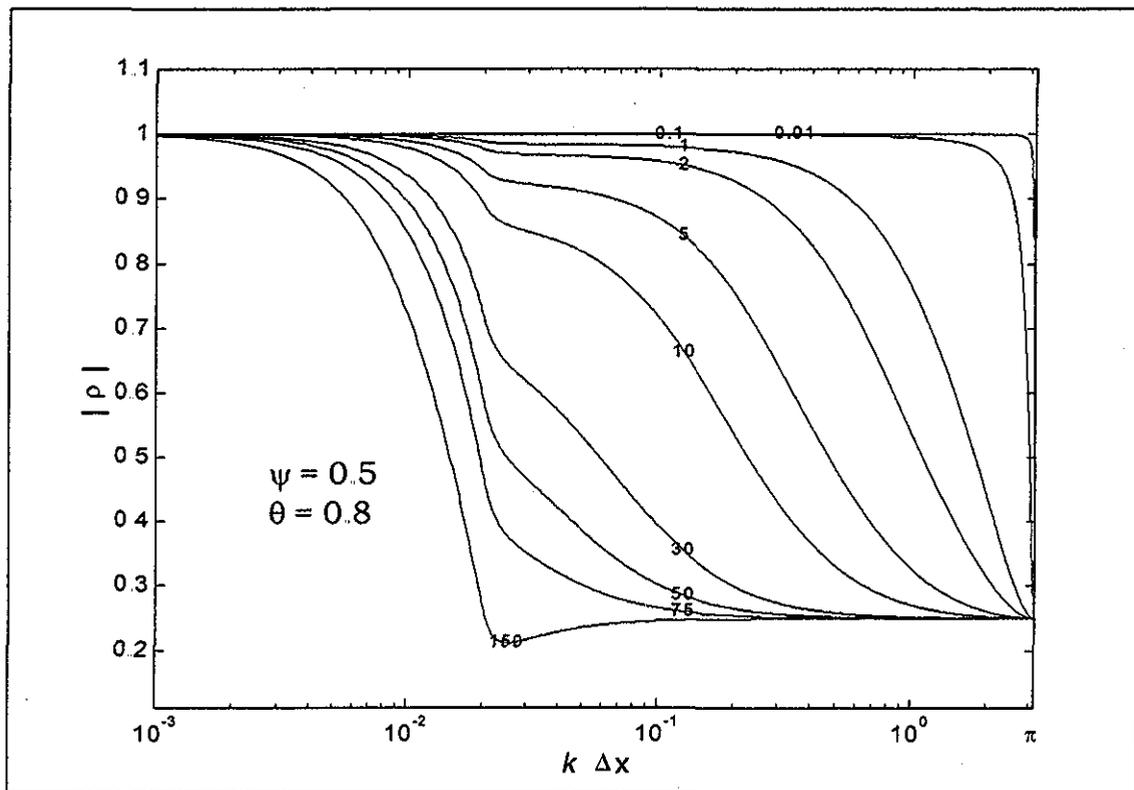


Lámina 5.5. Caso Ret_amp_Fs04Pr.

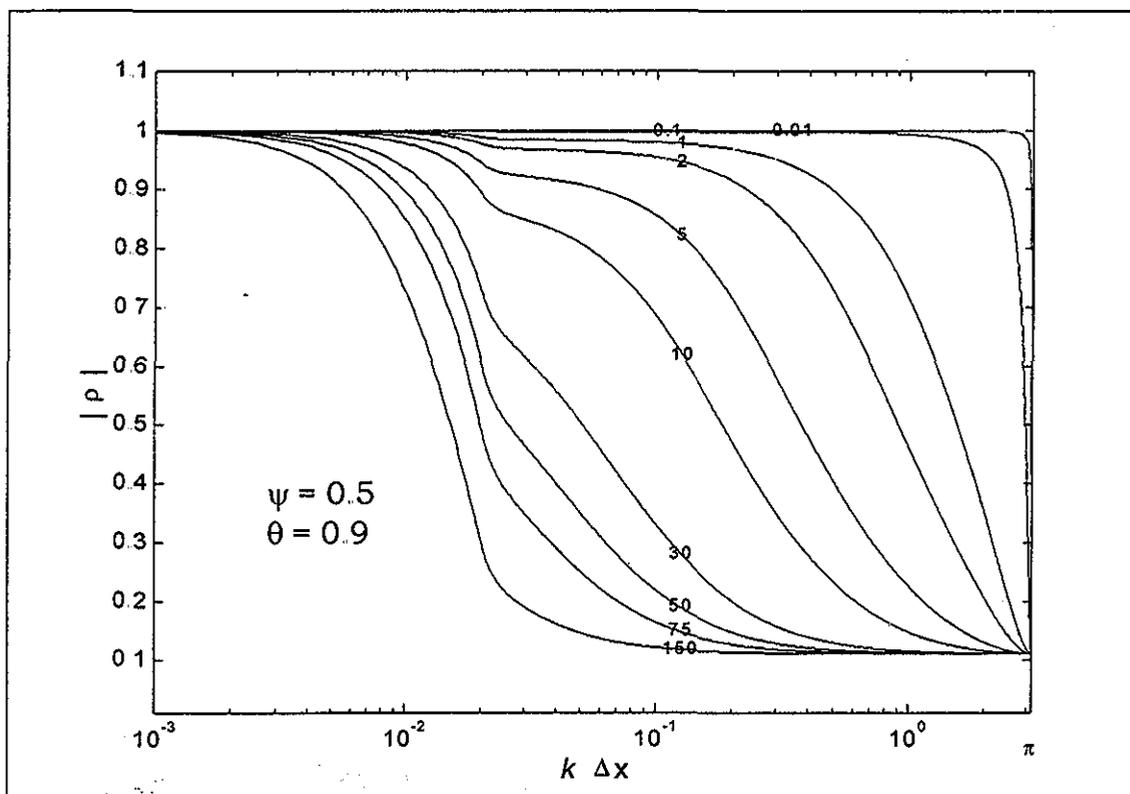


Lámina 5.6. Caso Ret_amp_Fs05Pr.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN



TESIS CON FALLA DE ORIGEN

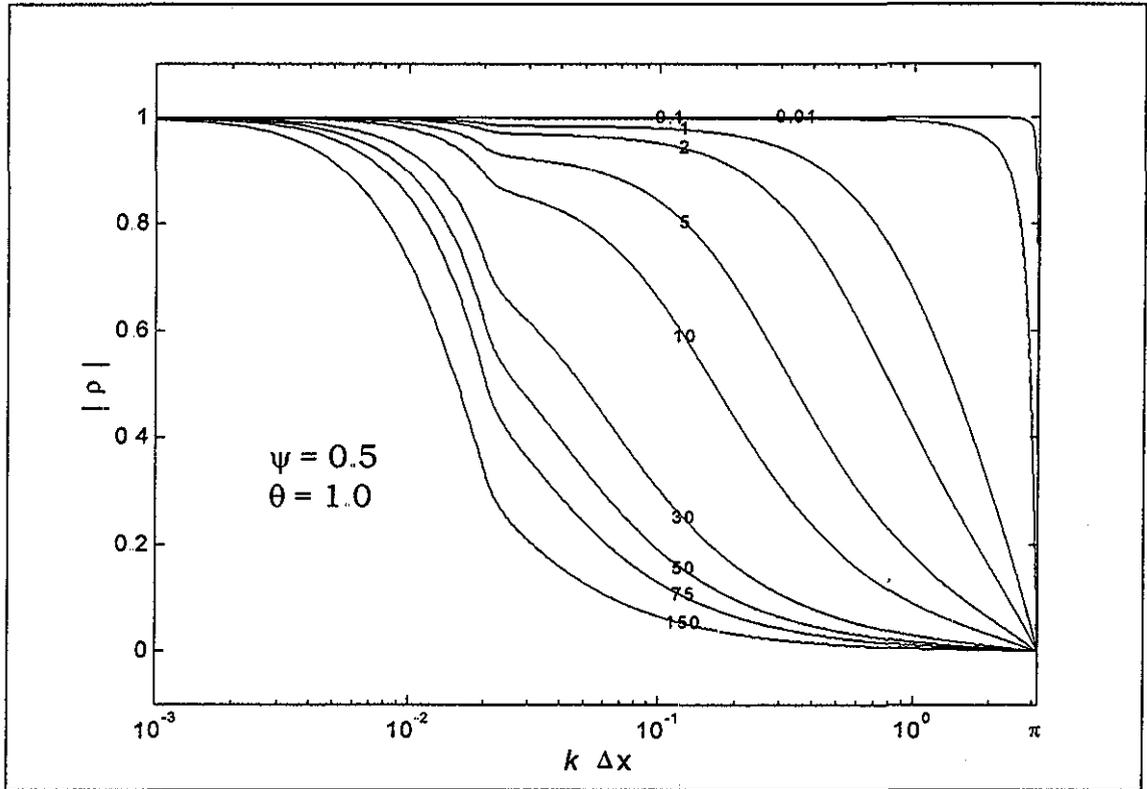


Lámina 5.7. Caso Ret_amp_Fs06Pr.

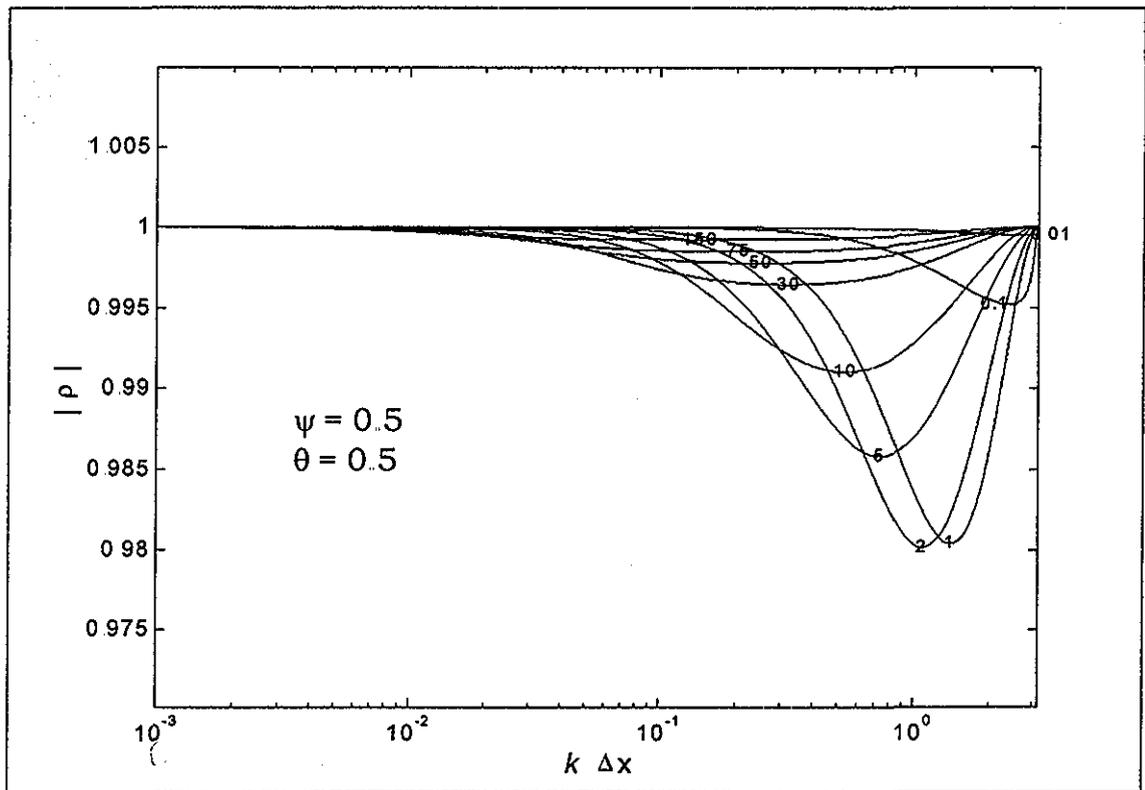


Lámina 5.8. Caso Ret_amp_Ft01Pr.

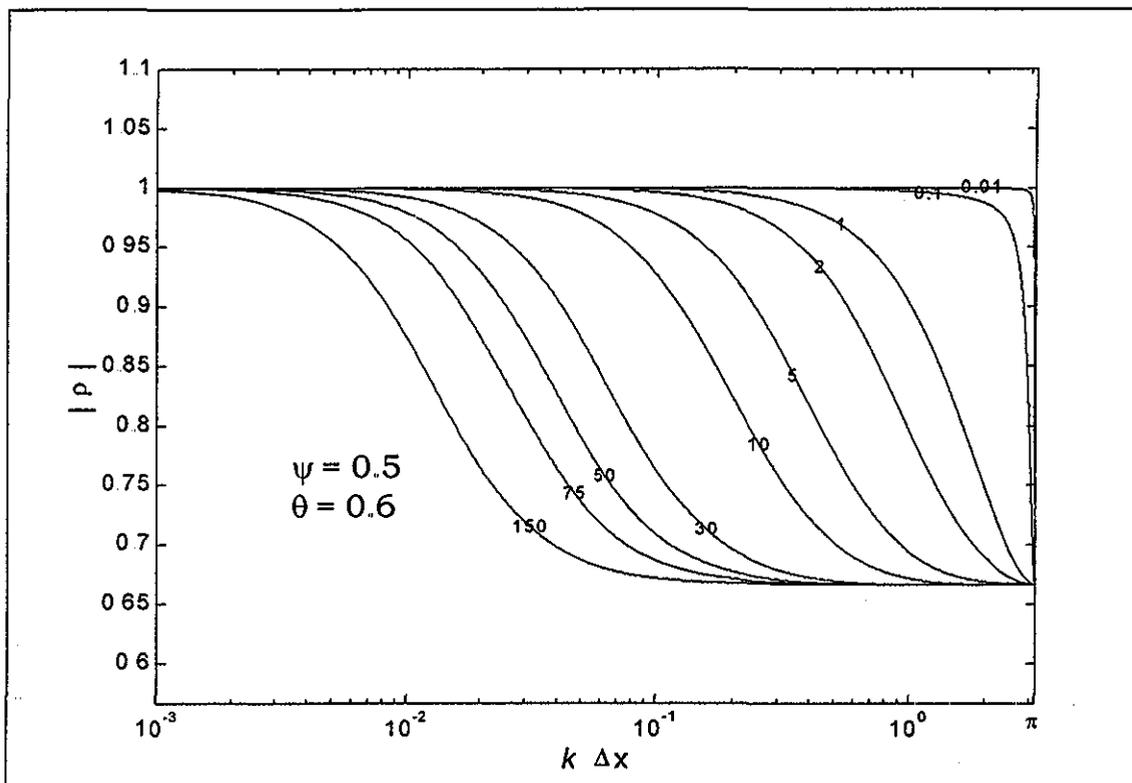


Lámina 5.9. Caso Ret_amp_Ft02Pr.

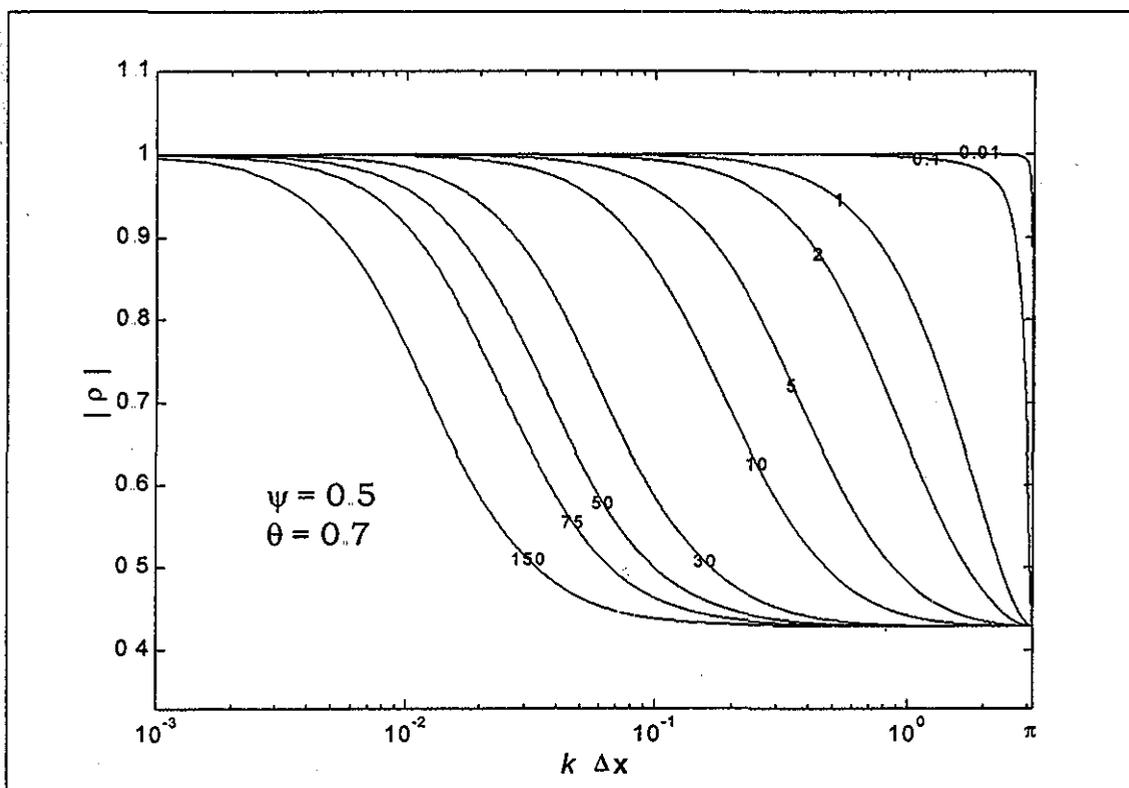


Lámina 5.10. Caso Ret_amp_Ft03Pr.

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

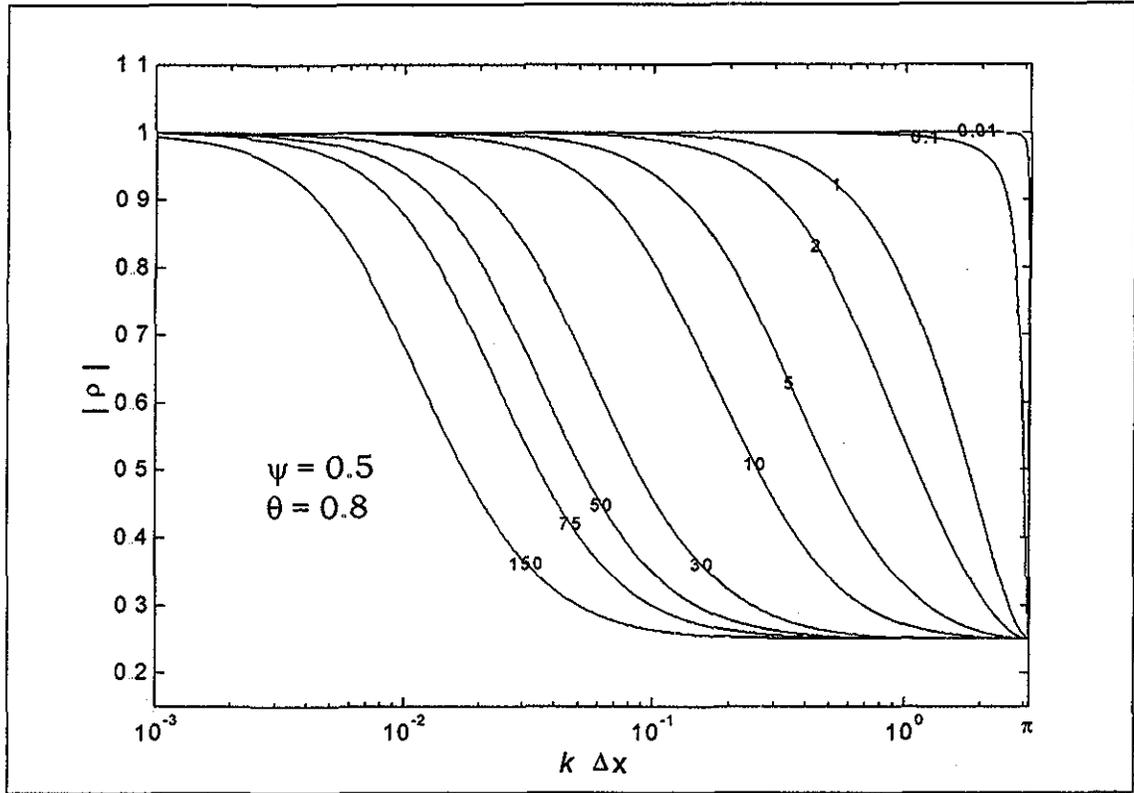


Lámina 5.11. Caso Ret_amp_Ft04Pr.

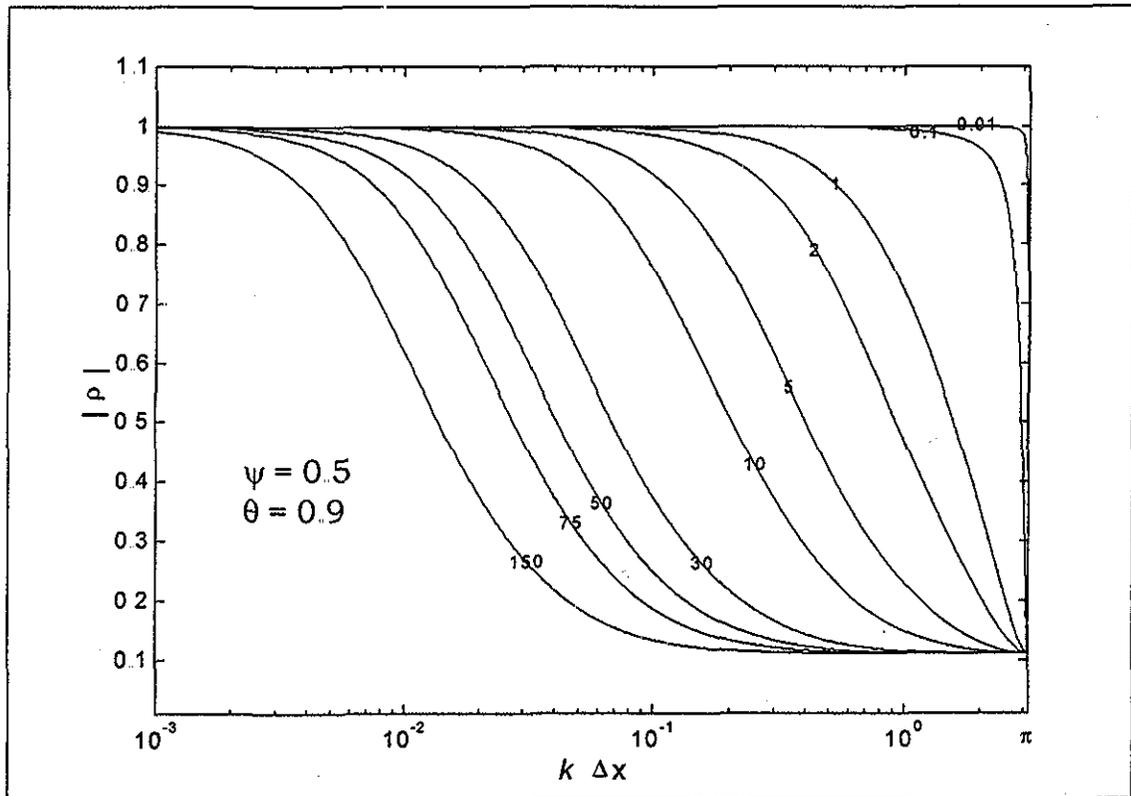


Lámina 5.12 Caso Ret_amp_Ft05Pr.

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA
1998 004

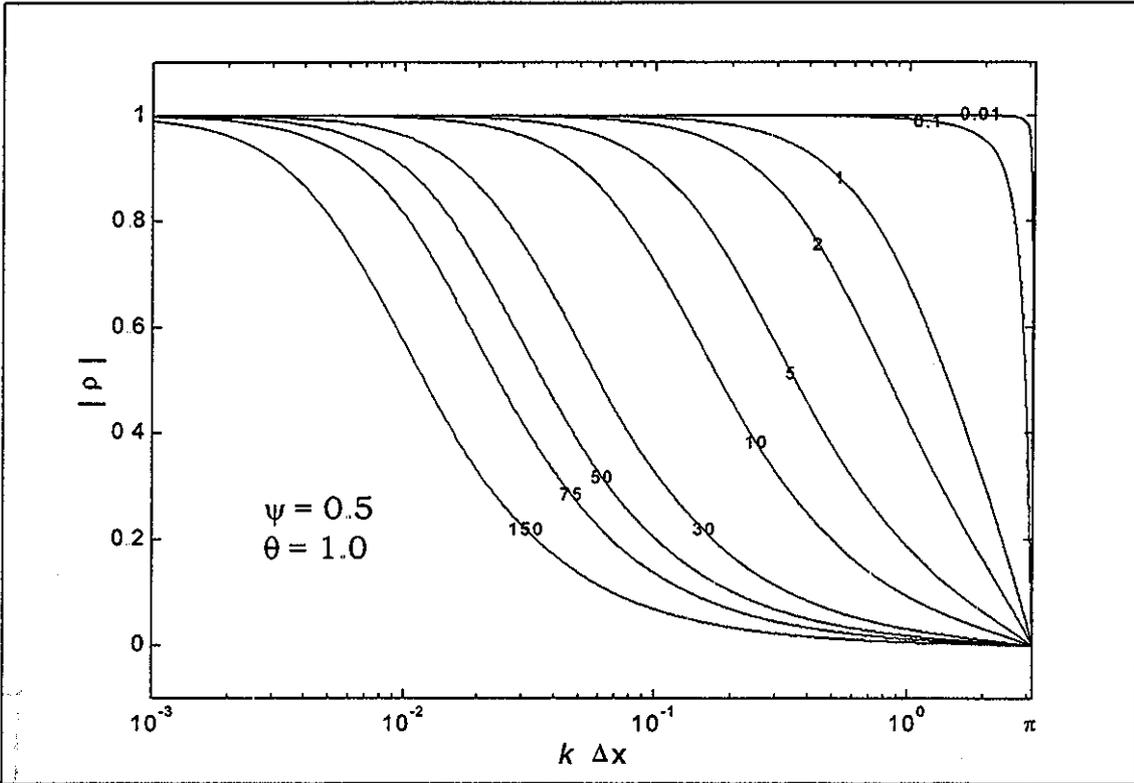


Lámina 5.13. Caso Ret_amp_Ft06Pr.

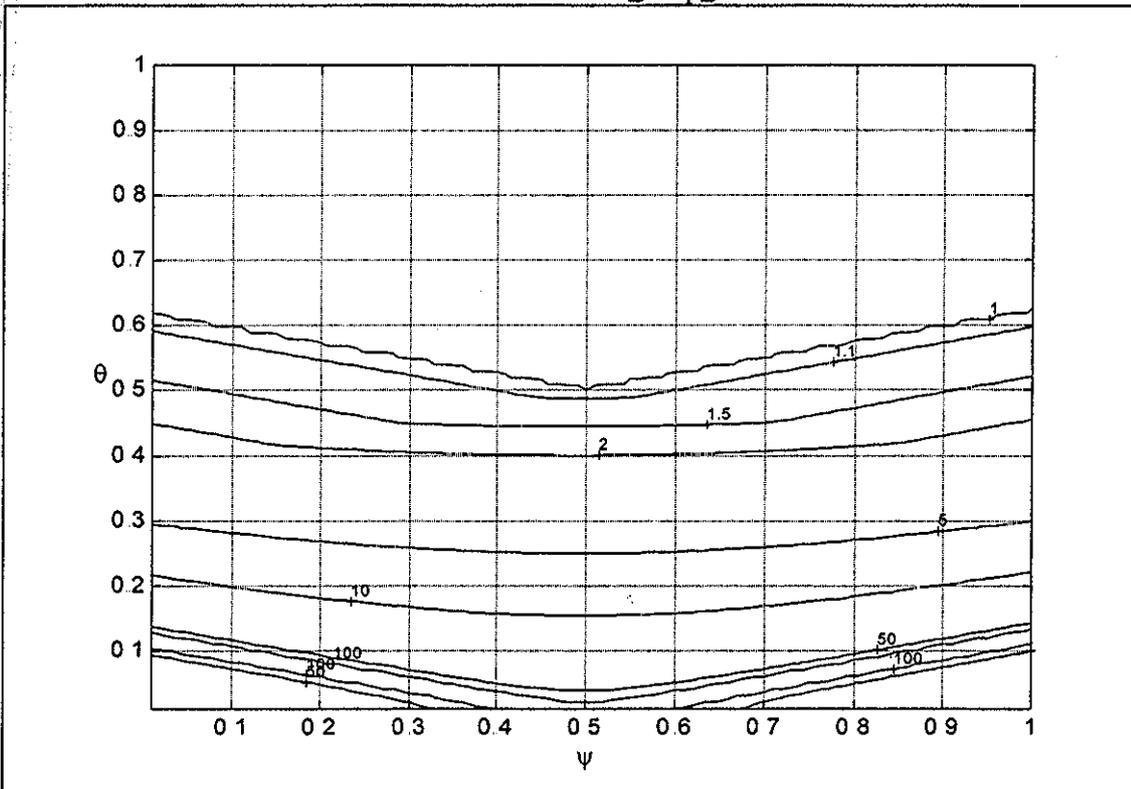


Lámina 5.14. Caso máx_ρ_01.

LIBRO DE ORIGEN
LIBRO DE ORIGEN

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

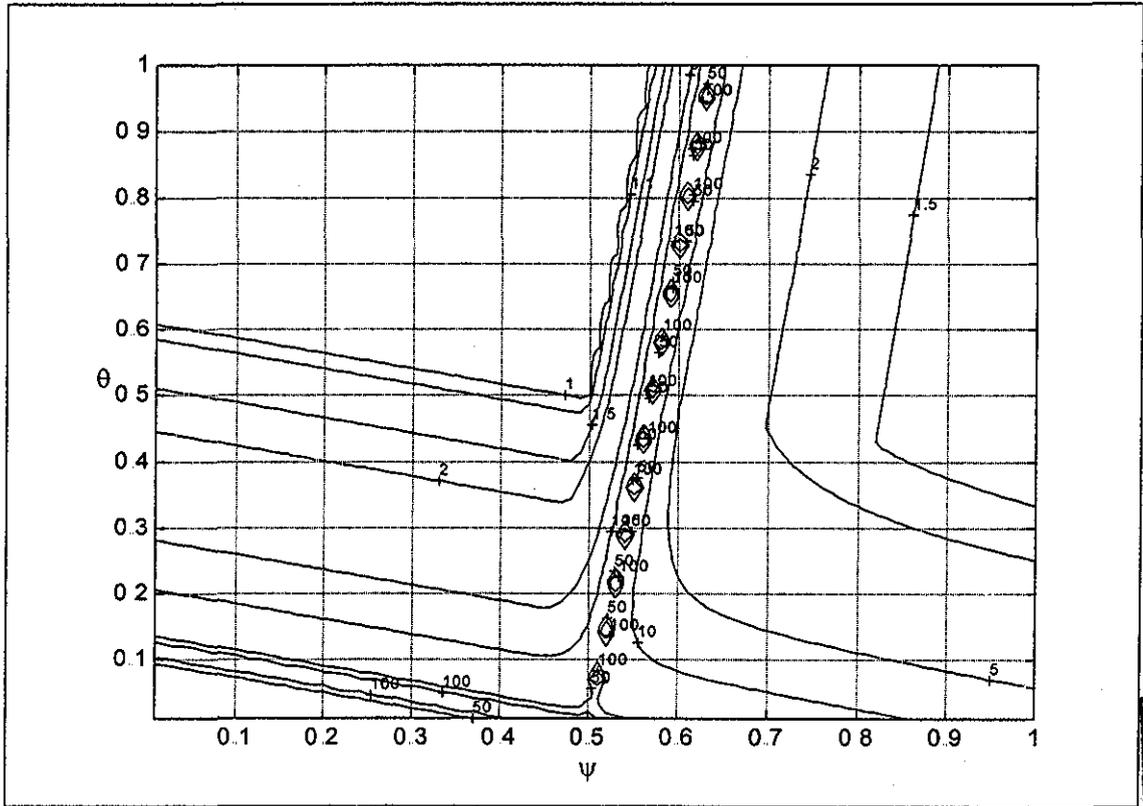


Lámina 5.15. Caso máx_p_02.

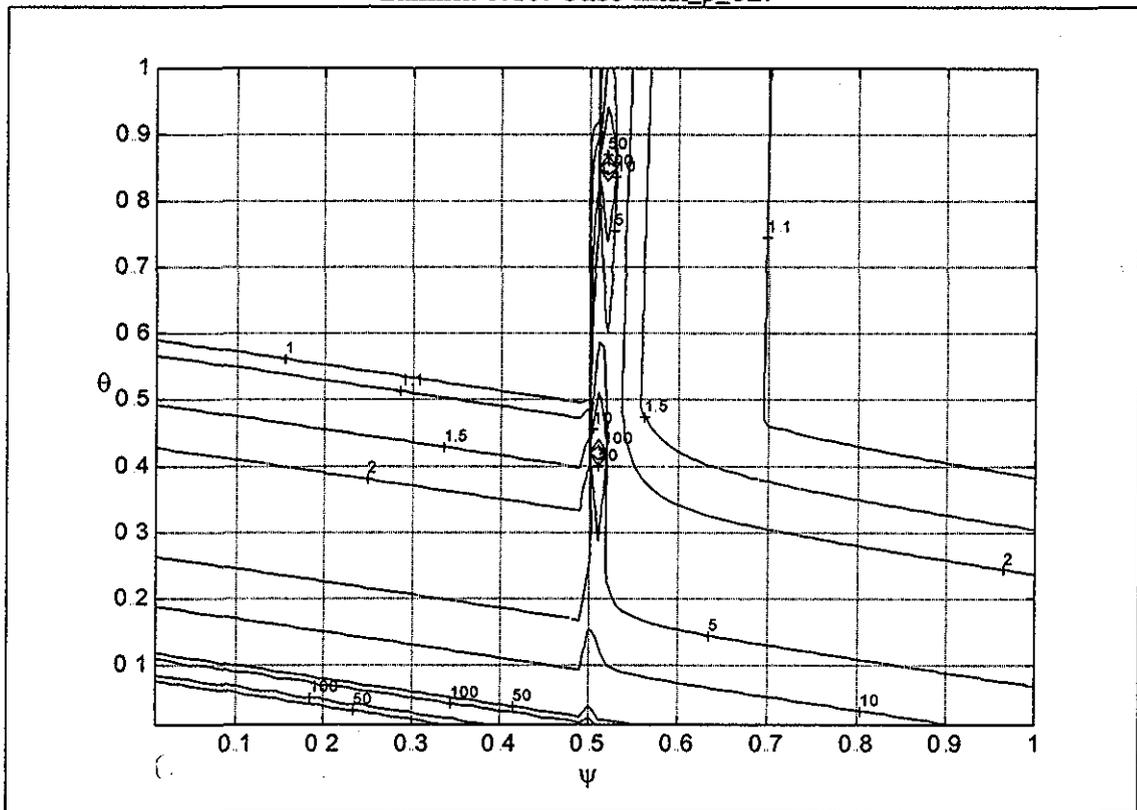


Lámina 5.16. Caso máx_p_03.

BIBLIOTECA DE ORIGIN
1982 304

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

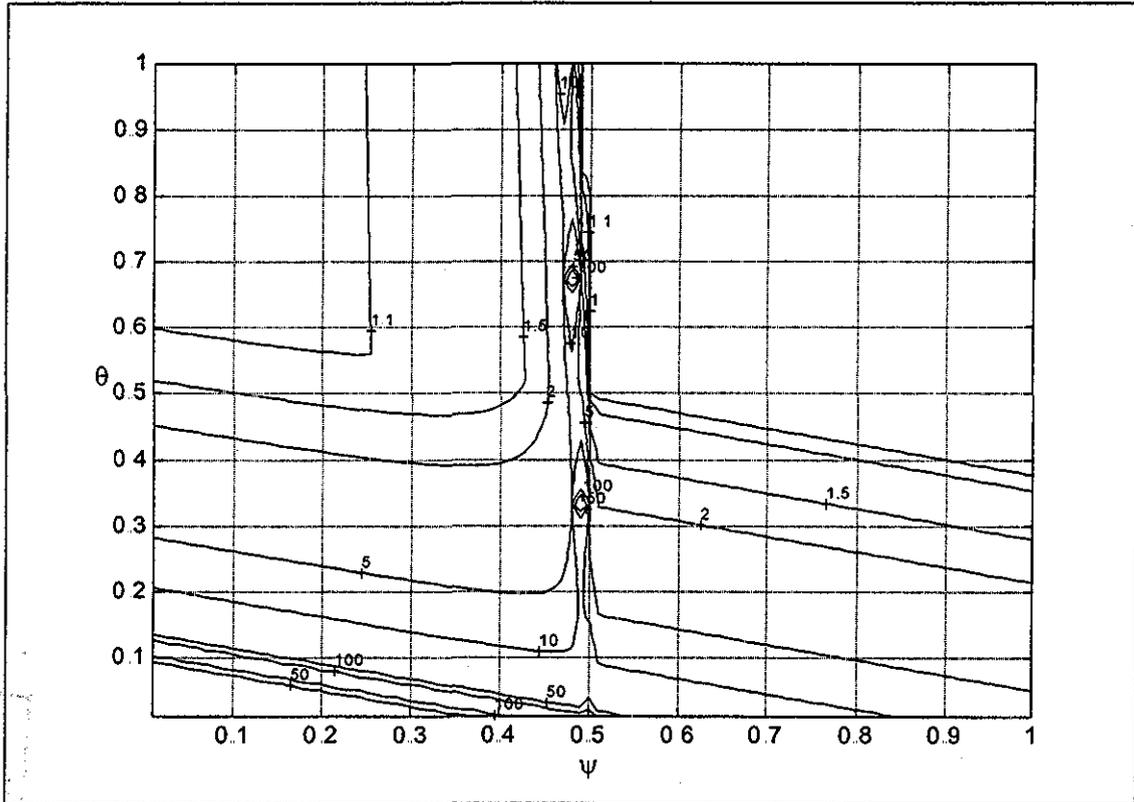


Lámina 5.17. Caso máx_ρ_04.

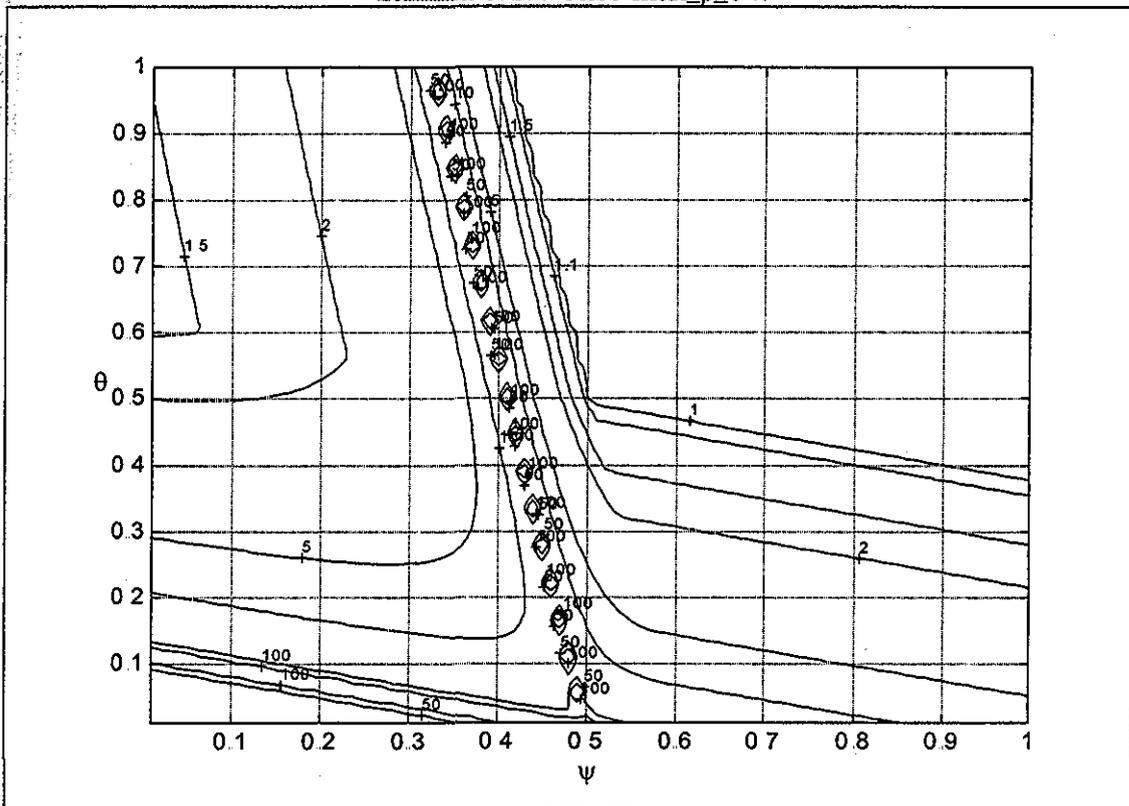


Lámina 5.18. Caso máx_ρ_05.

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

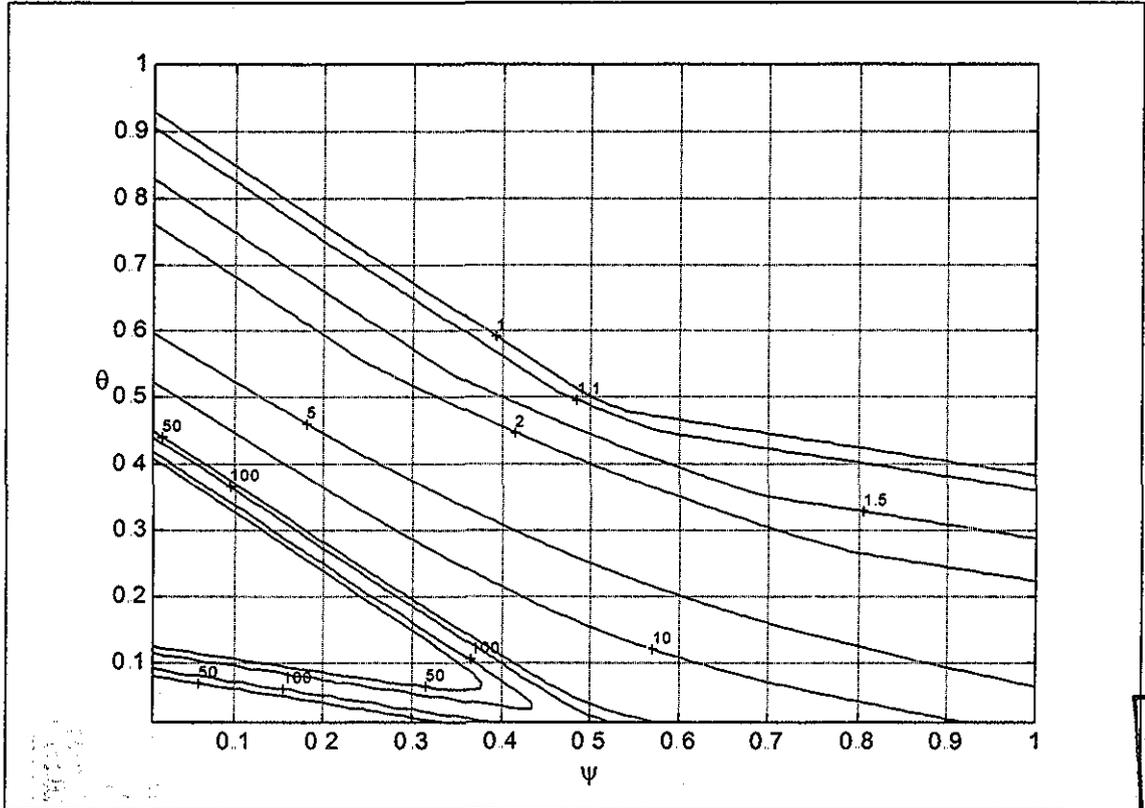


Lámina 5.19. Caso $\max_{\rho_{06}}$.

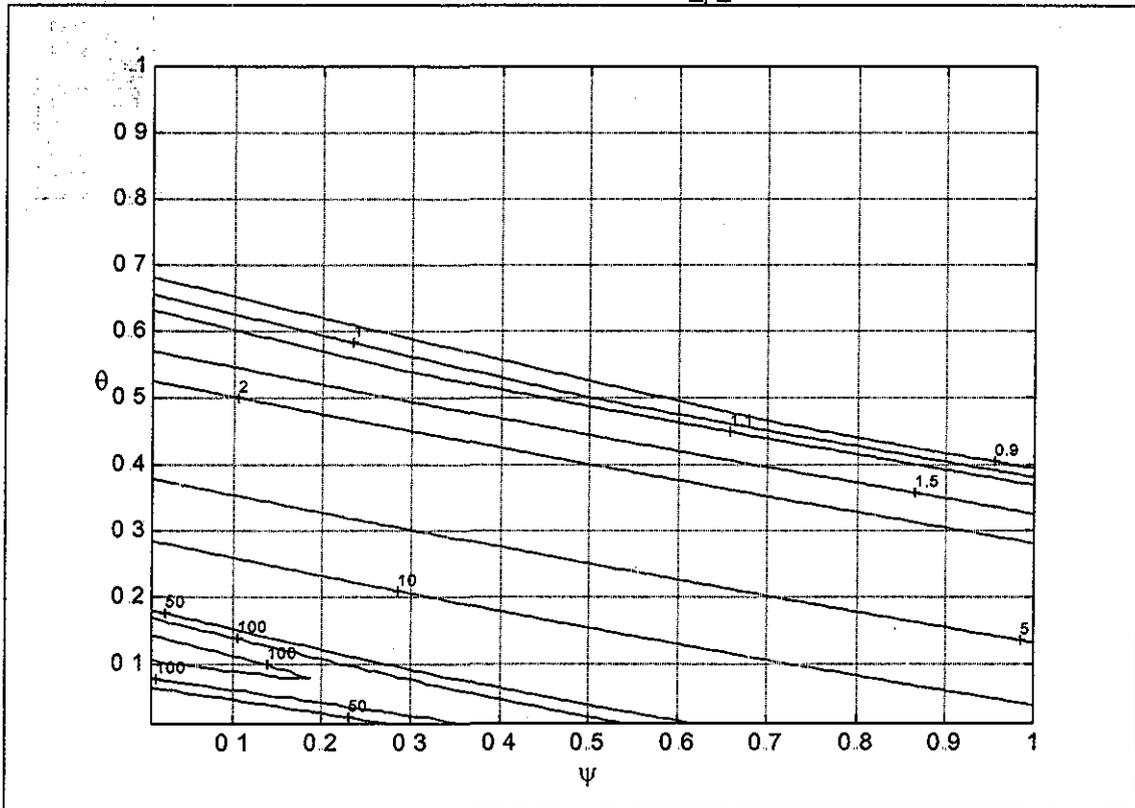


Lámina 5.20. Caso $\max_{\rho_{07}}$.

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

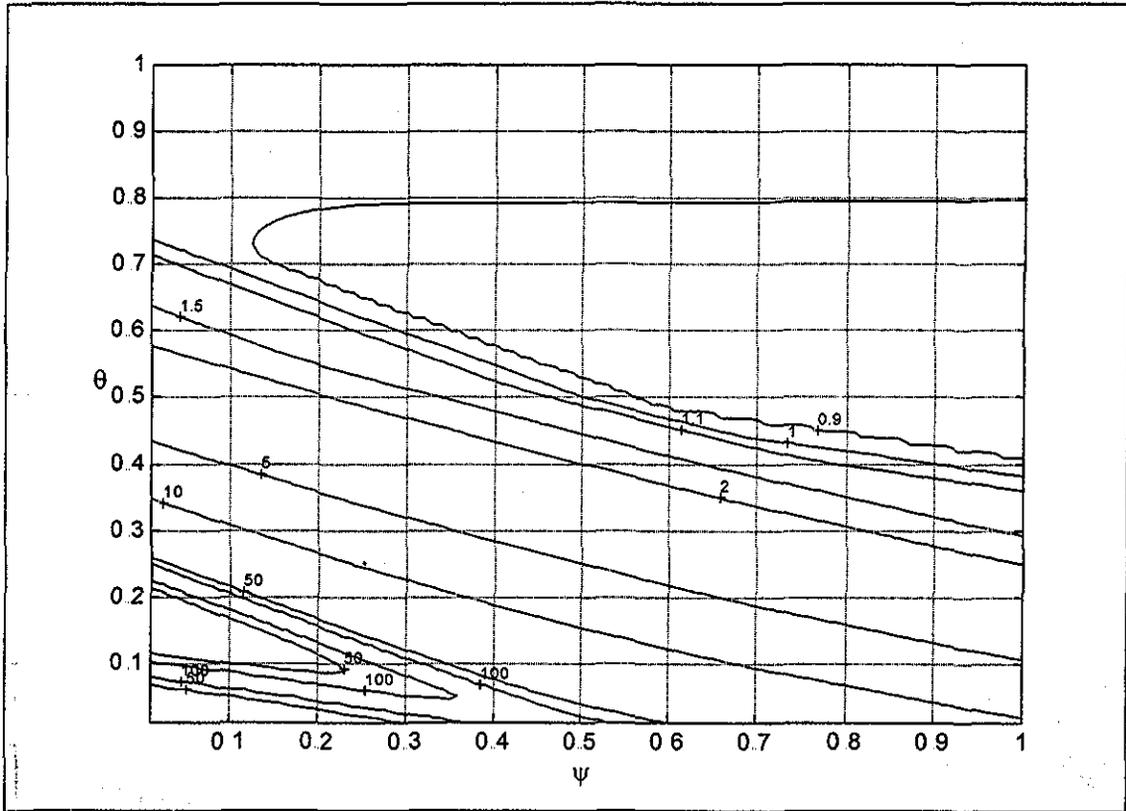


Lámina 5.21. Caso \max_{ρ_08} .

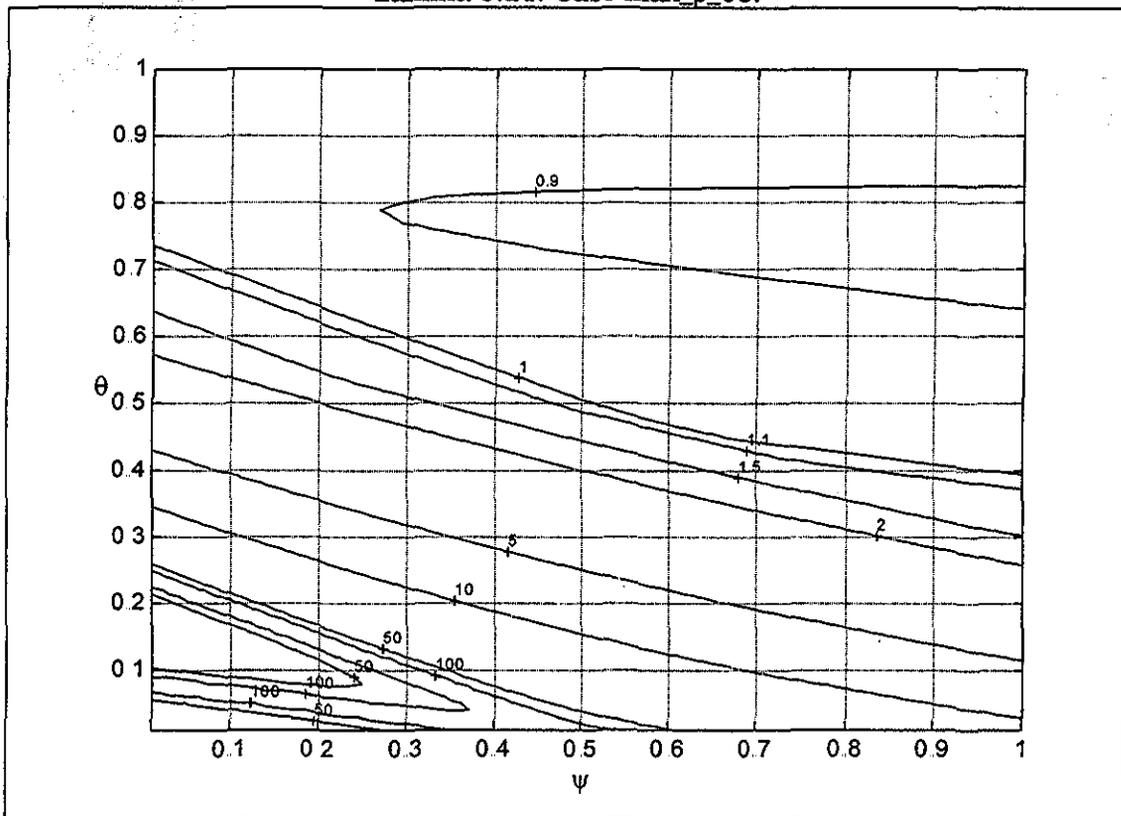


Lámina 5.22. Caso \max_{ρ_09} .

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

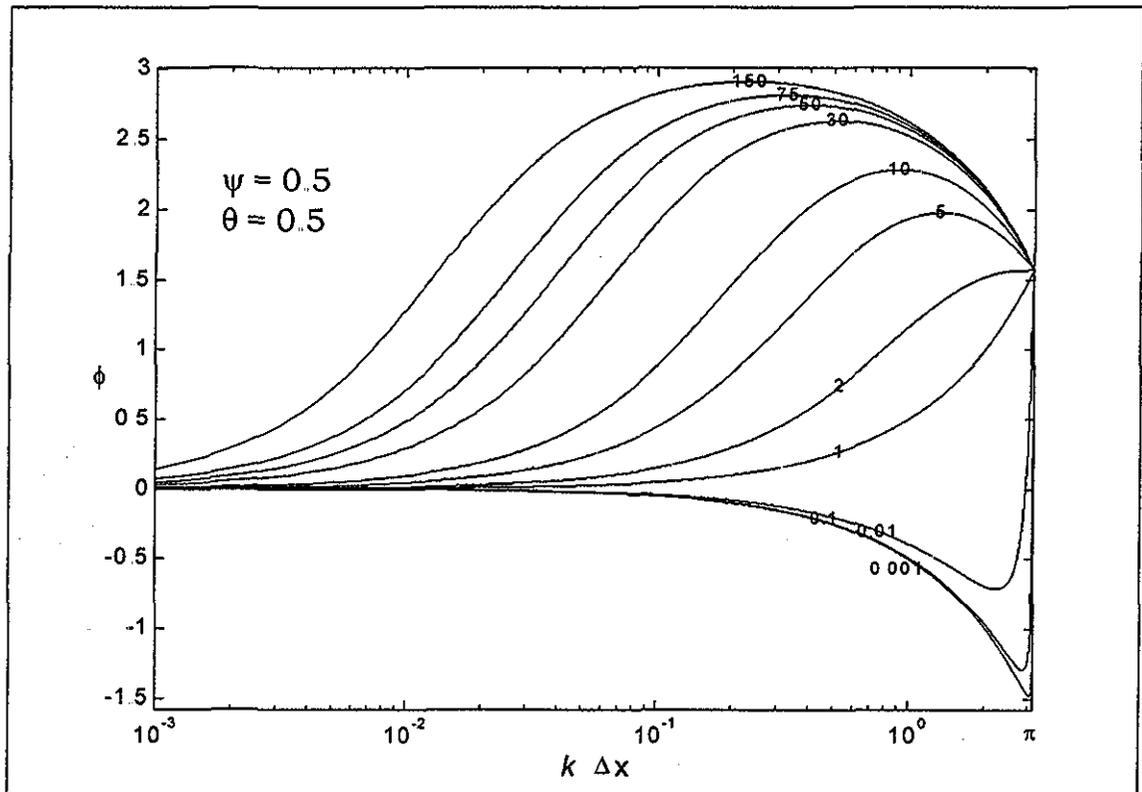


Lámina 5.23. Caso Ret_fas_Fs01Pr.

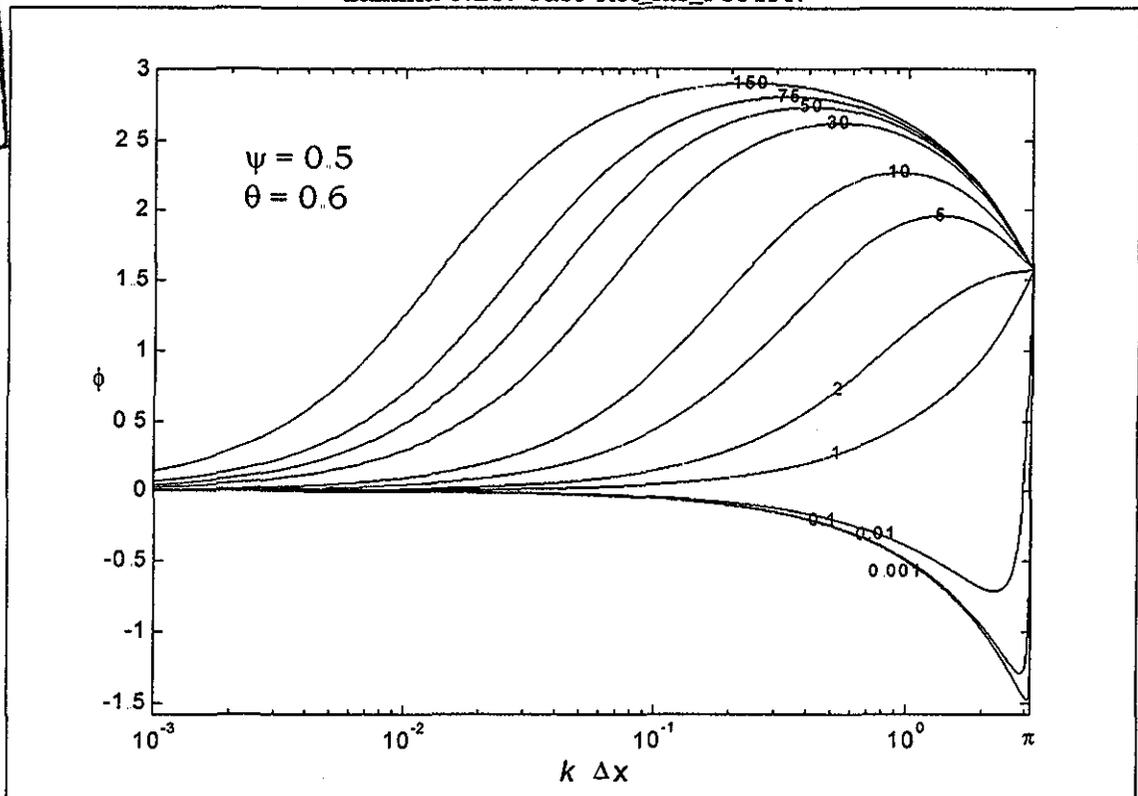


Lámina 5.24. Caso Ret_fas_Fs02Pr.

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

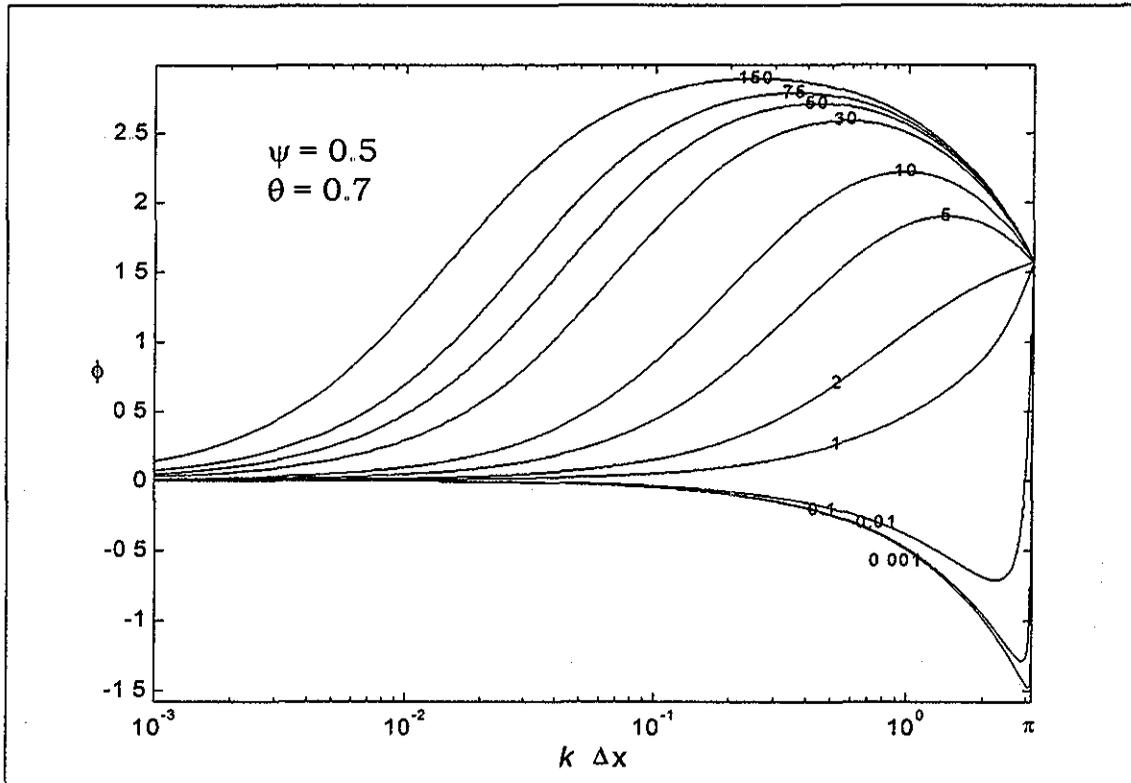


Lámina 5.25. Caso Ret_fas_Fs03Pr.

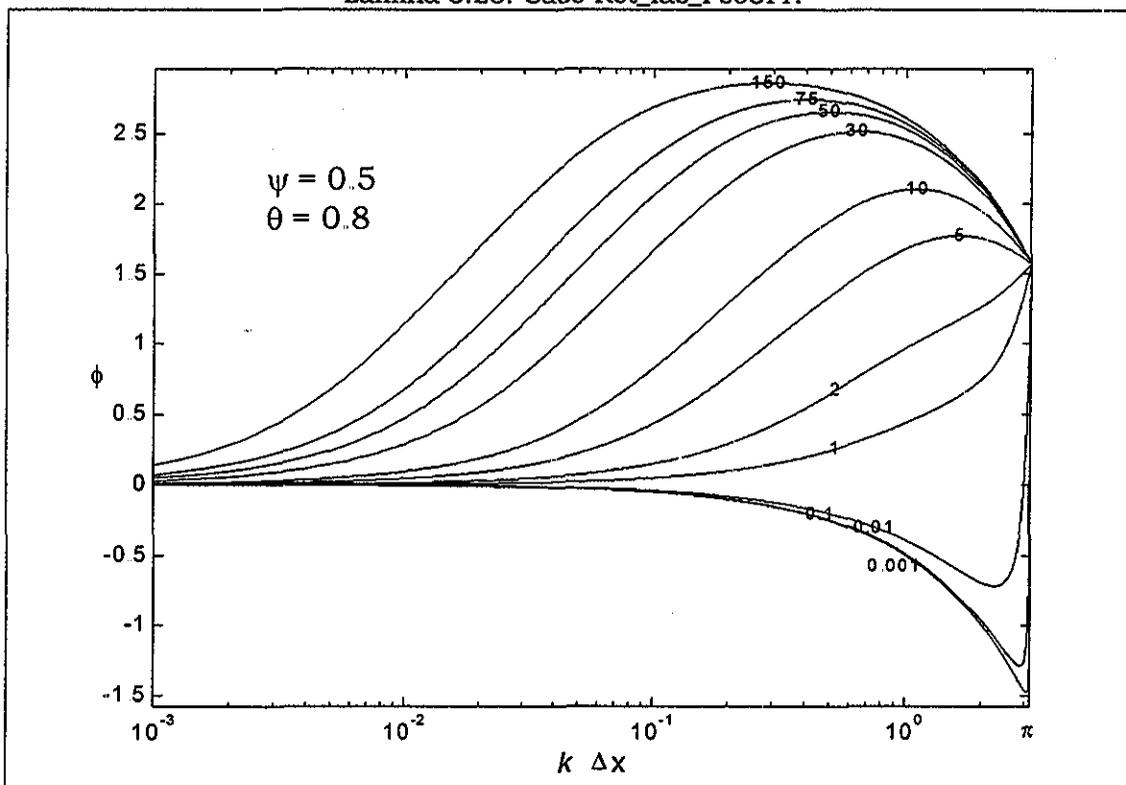


Lámina 5.26. Caso Ret_fas_Fs04Pr.

TESIS CON FALLA DE ORIGEN



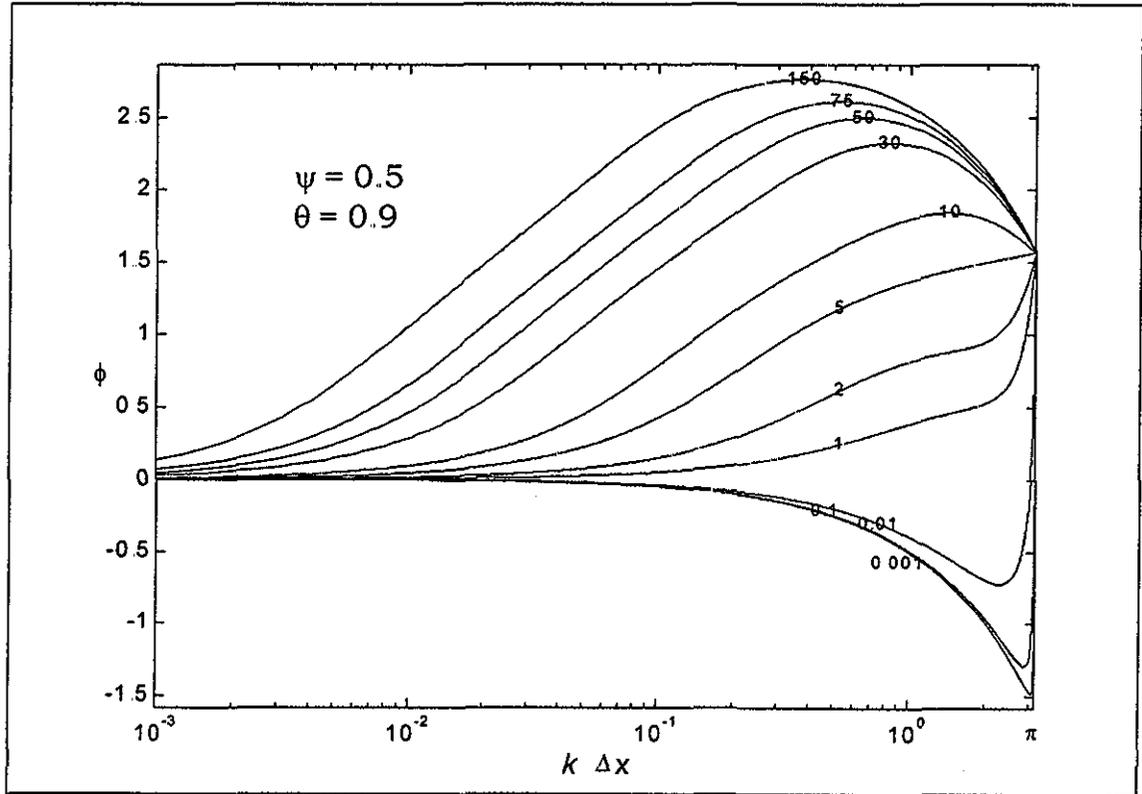


Lámina 5.27. Caso Ret_fas_Fs05Pr.

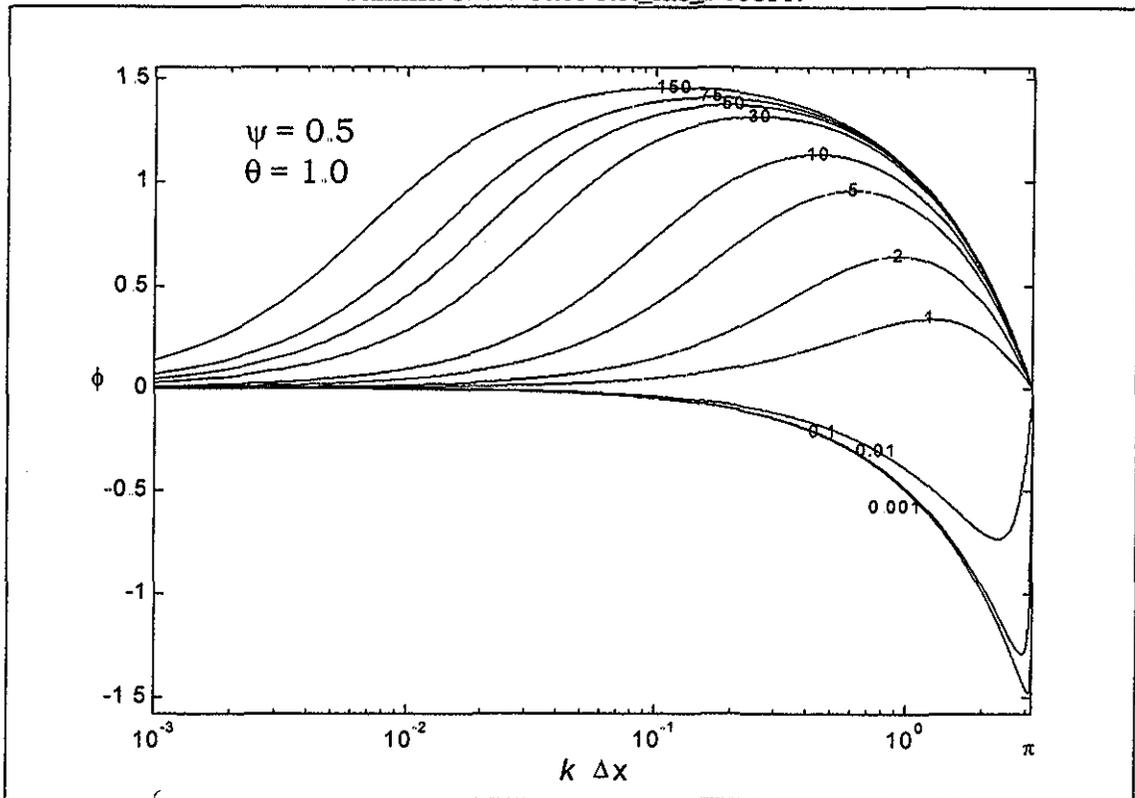


Lámina 5.28. Caso Ret_fas_Fs06Pr.

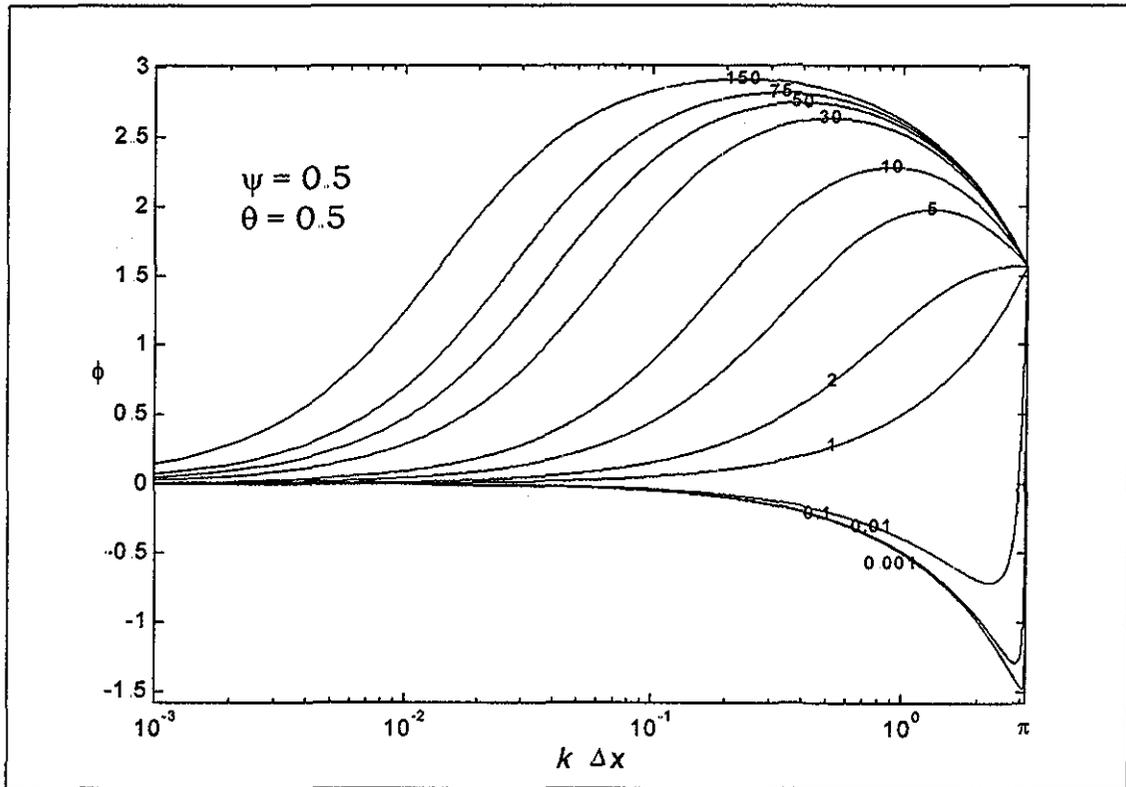


Lámina 5.29. Caso Ret_fas_Ft01Pr.

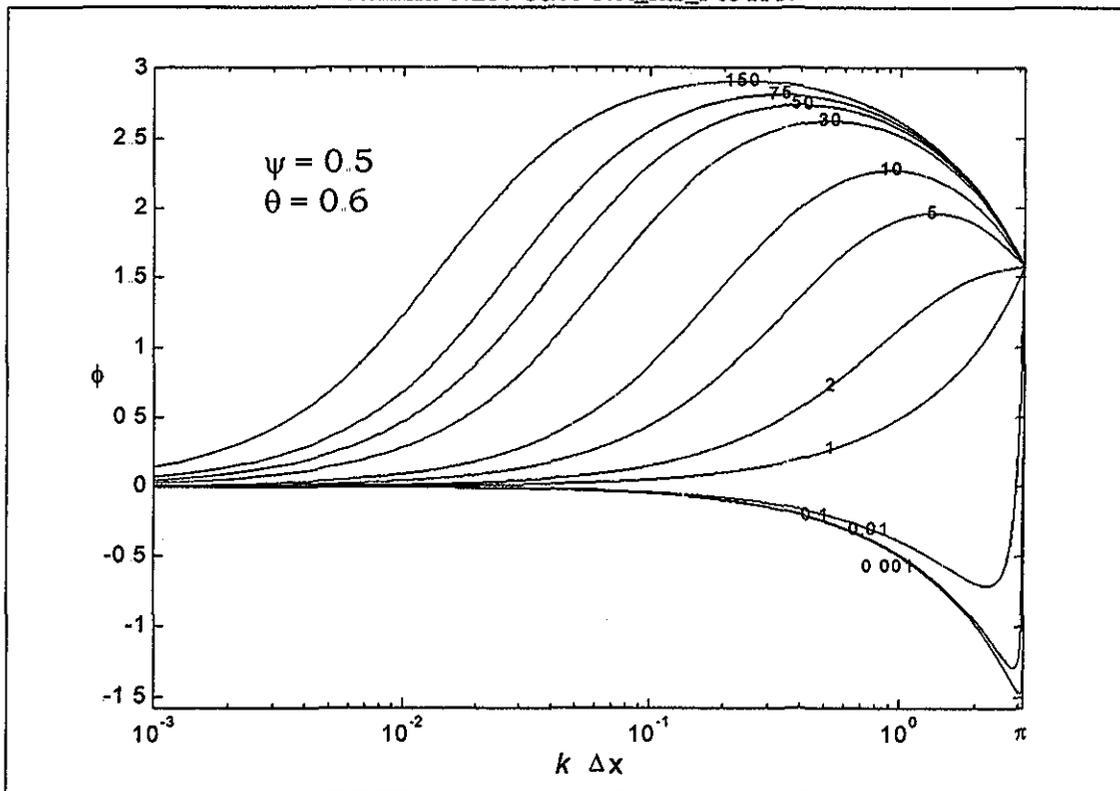


Lámina 5.30. Caso Ret_fas_Ft02Pr.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

UNIVERSIDAD NACIONAL
DE LA PLATA

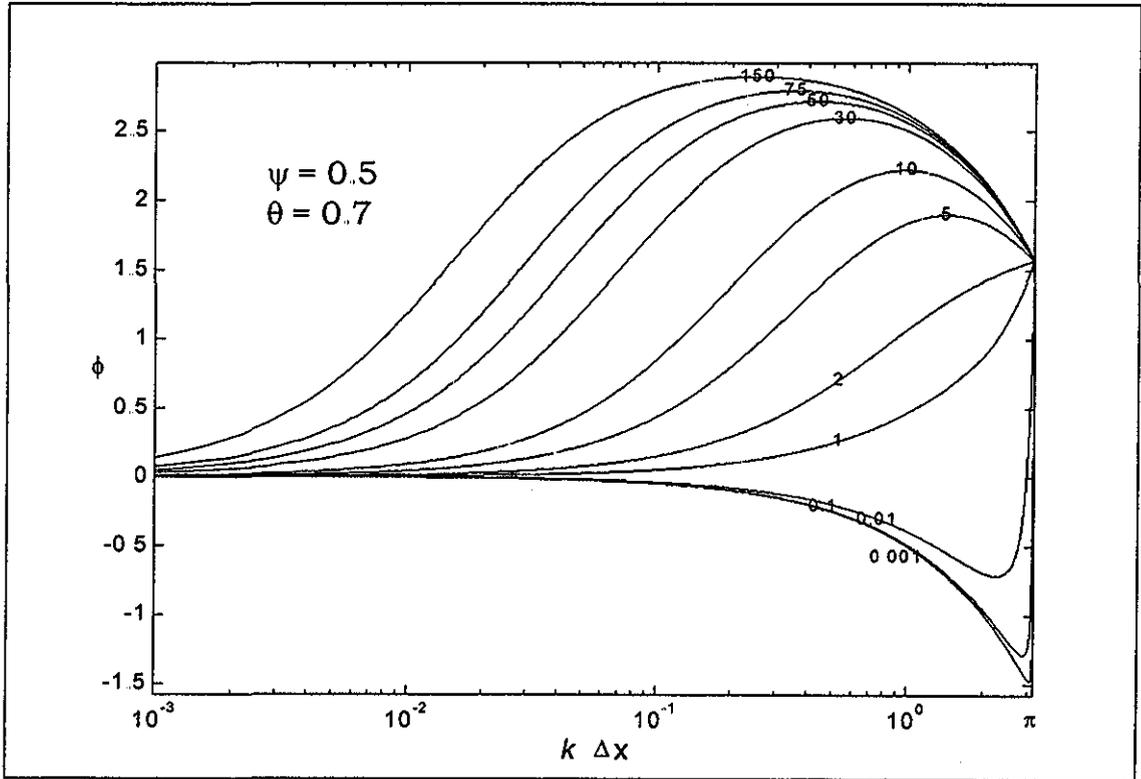


Lámina 5.31. Caso Ret_fas_Ft03Pr.

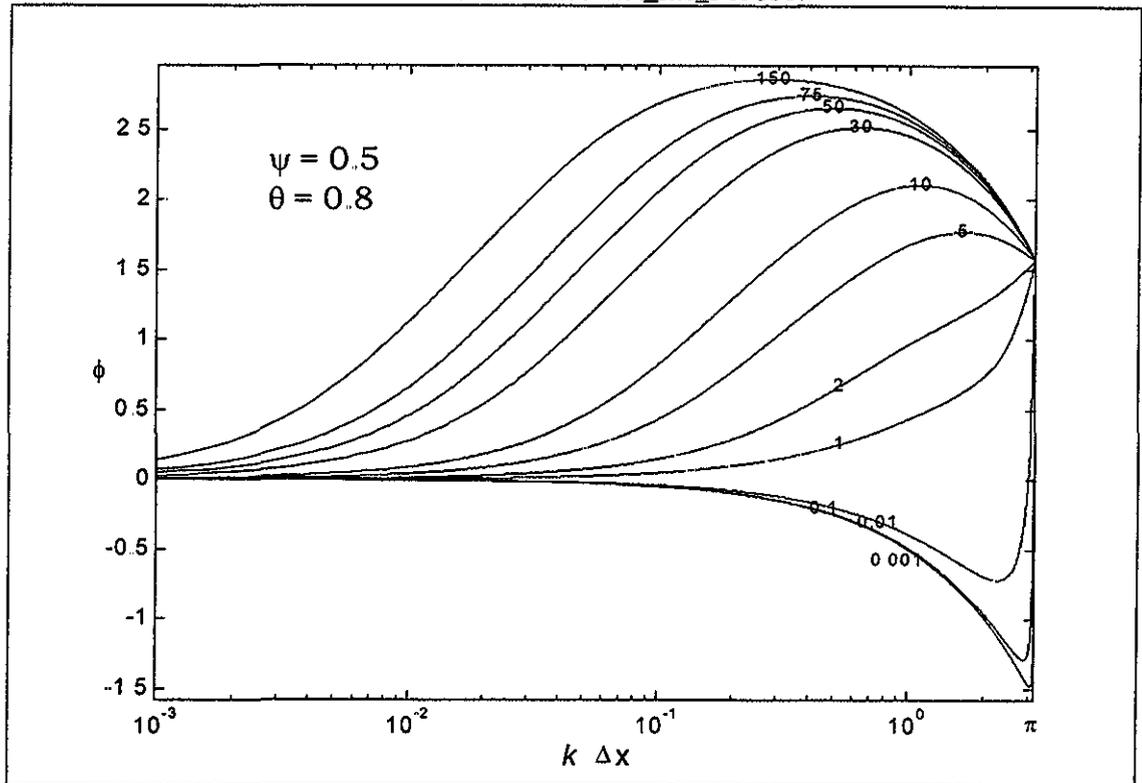


Lámina 5.32. Caso Ret_fas_Ft04Pr.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

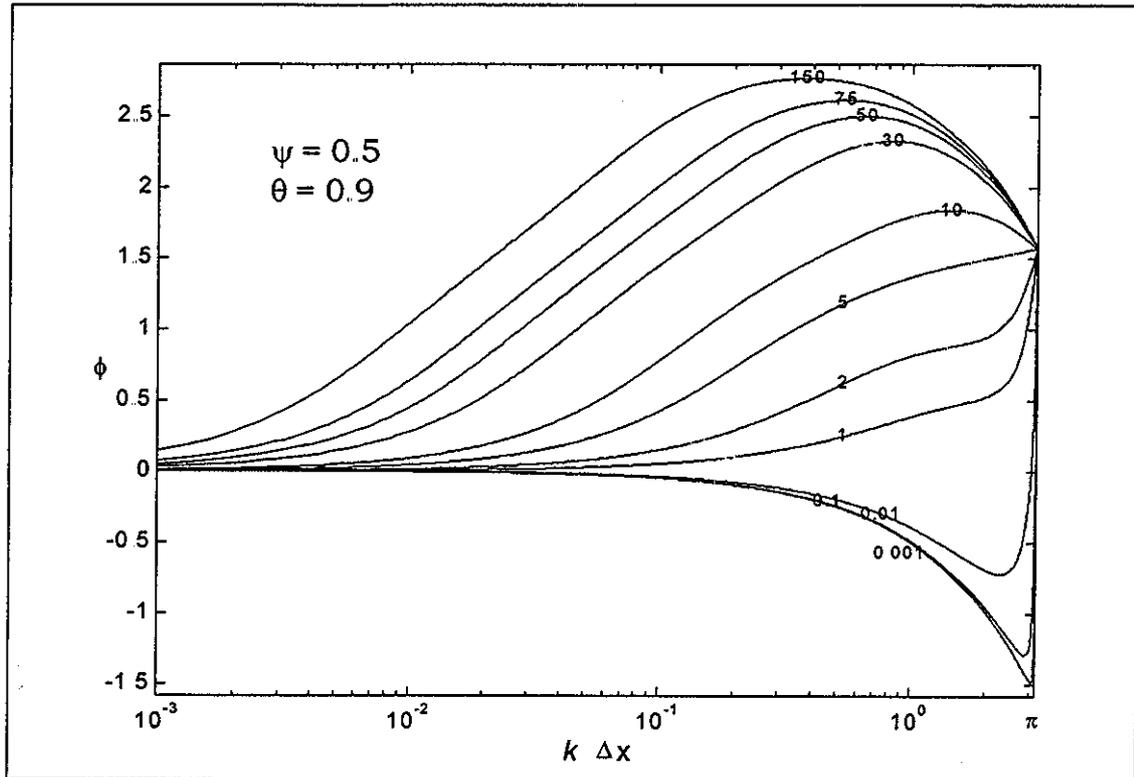


Lámina 5.33. Caso Ret_fas_Ft05Pr.

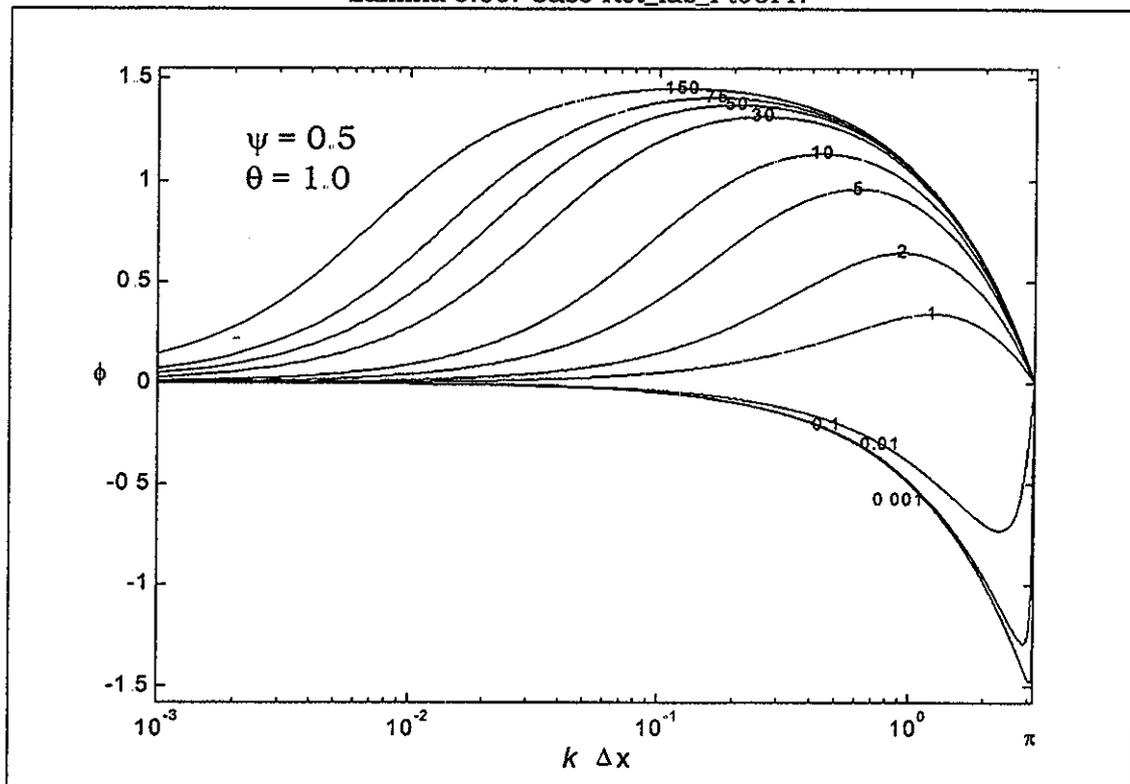


Lámina 5.34. Caso Ret_fas_Ft06Pr.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN



5.6. Análisis de convergencia del método de Picard

Hasta este momento el estudio de las propiedades de propagación del esquema de Preissmann aplicado a las ecuaciones de Saint-Venant se ha limitado a su consistencia numérica y estabilidad. Sin embargo, al aplicar el esquema de diferencias finitas al problema original de ecuaciones diferenciales parciales no lineales se obtiene un sistema de ecuaciones algebraicas que también son no lineales; esto implica que para su solución se debe considerar el empleo de un algoritmo iterativo (Paniconi, *et al.*, 1991).

De tal modo, en esta parte del trabajo se realizará un análisis de convergencia en un paso de tiempo Δt al aplicar la metodología iterativa de Picard (Aldama y Paniconi, 1991; Paniconi, *et al.*, 1991; Baume y Malaterre, 1992). Con el fin de tener un punto de comparación con otra metodología de solución iterativa, en el siguiente subcapítulo se analizará la metodología de Newton-Raphson (Burden y Faires, 1988; Fennema y Chaudry, 1989; Paniconi, *et al.*, 1991), y ambos estudios se aplicarán al sistema de ecuaciones algebraicas no lineales producto de la aplicación del esquema de Preissmann en las ecuaciones de flujo a superficie libre unidimensional.

Cabe señalar que en el apartado (5.1) se presentó dicho esquema de discretización. La forma que allí presenta el término convectivo de la ecuación de cantidad de movimiento (5.1.5) dificulta programar un algoritmo adecuado para la actualización no lineal (ya sea por el método de Picard o por el de Newton-Raphson). En vista de lo anterior, se propone manejar el término convectivo de la ecuación de cantidad de movimiento (2.3.52) desarrollando las derivadas espaciales como muestra a continuación:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\tilde{Q}^2}{\tilde{A}} \right) = 2 \frac{\tilde{Q}}{\tilde{A}} \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial x} - \frac{\tilde{Q}^2}{\tilde{A}^2} \frac{\partial \tilde{A}}{\partial x} \quad (5.6.1)$$

Además, para evaluar el término que contiene el nivel de la superficie libre del agua, se considera que $h(\tilde{A}; x, t) = y(\tilde{A}; x, t) + z(x)$, donde $y(\tilde{A}; x, t)$ es el tirante en la sección transversal y $z(x)$ la elevación de la plantilla del canal. Por tanto, la variación espacial del nivel de la superficie libre del agua en (2.3.53), se puede escribir de la forma siguiente, aplicando la regla de la cadena:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h(\tilde{A}; x, t)}{\partial x} &= \frac{\partial y(\tilde{A}; x, t)}{\partial x} + \frac{\partial z(x)}{\partial x} \\ &= \frac{\partial y(\tilde{A}; x, t)}{\partial \tilde{A}} \frac{\partial \tilde{A}}{\partial x} - S_b(x) = \frac{1}{B(\tilde{A}; x, t)} \frac{\partial \tilde{A}}{\partial x} - S_b(x) \end{aligned} \quad (5.6.2)$$

donde $B(\tilde{A}; x, t)$ es el ancho de la superficie del agua en la sección transversal y $S_b(x)$ la pendiente longitudinal del fondo del canal.





Entonces, sustituyendo las ecuaciones (5.6.1) y (5.6.2) en la ecuación de cantidad de movimiento (2.3.53) y agrupando:

$$\mathcal{M}(\tilde{A}, \tilde{Q}; x, t) = \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial t} + 2 \frac{\tilde{Q}}{\tilde{A}} \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial x} + \left(g D(\tilde{A}; x, t) - \frac{\tilde{Q}^2}{\tilde{A}^2} \right) \frac{\partial \tilde{A}}{\partial x} + g \tilde{A} [S_f(\tilde{A}, \tilde{Q}; x, t) - S_b(x)] = 0 \quad (5.6.3)$$

donde $D(\tilde{A}; x, t) = \tilde{A}/B(\tilde{A}; x, t)$ es el tirante hidráulico.

Para el análisis de convergencia de la iteración no lineal de Picard, se realizará una aproximación temporal en diferencias finitas a las ecuaciones de Saint-Venant conservativas (2.3.52) y (5.6.3), como se muestra a continuación:

$$\mathcal{L}^*(A_j^n, Q_j^n, A_j^{n+1, m+1}, Q_j^{n+1, m+1}) \equiv \frac{A^{n+1, m+1} - A^n}{\Delta t} + (1 - \theta) \left(\frac{\partial Q}{\partial x} \right)^n + \theta \left(\frac{\partial Q}{\partial x} \right)^{n+1, m+1} = 0 \quad (5.6.4)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^*(A_j^n, Q_j^n, A_j^{n+1, m+1}, Q_j^{n+1, m+1}) &\equiv \frac{Q_j^{n+1, m+1} - Q_j^n}{\Delta t} + \\ &2 \left[(1 - \theta) \left(\frac{Q}{A} \right)^n + \theta \left(\frac{Q}{A} \right)^{n+1, m} \right] \left[(1 - \theta) \left(\frac{\partial Q}{\partial x} \right)^n + \theta \left(\frac{\partial Q}{\partial x} \right)^{n+1, m+1} \right] + \end{aligned} \quad (5.6.5)$$

$$\left[(1 - \theta) \left(gD - \frac{Q^2}{A^2} \right)^n + \theta \left(gD - \frac{Q^2}{A^2} \right)^{n+1, m} \right] \left[(1 - \theta) \left(\frac{\partial A}{\partial x} \right)^n + \theta \left(\frac{\partial A}{\partial x} \right)^{n+1, m+1} \right] +$$

$$[(1 - \theta)(S_f - S_b)^n + \theta(S_f - S_b)^{n+1, m}] [(1 - \theta)A^n + \theta A^{n+1, m+1}] = 0$$

donde \mathcal{L}^* y \mathcal{M}^* son operadores semidiscretos asociados respectivamente con la ecuación de conservación de masa y de cantidad de movimiento; n es el intervalo de tiempo; m es el identificador de actualización de los términos no lineales y θ es el factor de peso temporal.

Para determinar la propagación del error en cada iteración m en (5.6.4) y (5.6.5), debe considerarse que el valor actual de las variables dependientes tienen una pequeña diferencia con respecto a la solución exacta de forma que:

$$A^{n+1, m} = \bar{A}^{n+1, m} + a^m \quad ; \quad \left| \bar{A}^{n+1, m} \right| \gg \left| a^m \right| \quad (5.6.6)$$

$$Q^{n+1, m} = \bar{Q}^{n+1, m} + q^m \quad ; \quad \left| \bar{Q}^{n+1, m} \right| \gg \left| q^m \right| \quad (5.6.7)$$

donde las variables $(\bullet)^{n+1}$ son la solución exacta a la cual deben tender las variables a medida que progresan las iteraciones, y $(\bullet)^m$ es el error que se tiene



en la iteración m . Para evaluar el comportamiento del error en la solución iterada del esquema en diferencias se sustituyen las ecuaciones (5.6.6) y (5.6.7) en (5.6.4) y (5.6.5), de forma que:

$$\mathcal{L}^*(A^n, Q^n, \bar{A}^{n+1} + a^m, \bar{Q}^{n+1} + q^m) = \frac{\bar{A}^{n+1} + a^m - A^n}{\Delta t} + (1-\theta)\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)^n + \theta\left(\frac{\partial(\bar{Q} + q)}{\partial x}\right)^{n+1, m+1} \quad (5.6.8)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^*(A^n, Q^n, \bar{A}^{n+1} + a^m, \bar{Q}^{n+1} + q^m) &= \frac{\bar{Q}^{n+1} + q^{m+1} - Q^n}{\Delta t} + \\ &2\left[(1-\theta)\left(\frac{Q}{A}\right)^n + \theta\left(\frac{\bar{Q} + q}{\bar{A} + a}\right)^{n+1, m}\right]\left[(1-\theta)\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)^n + \theta\left(\frac{\partial(\bar{Q} + q)}{\partial x}\right)^{n+1, m+1}\right] + \\ &\left[(1-\theta)\left(gD - \frac{Q^2}{A^2}\right)^n + \theta\left(gD(\bar{A} + a) - \frac{(\bar{Q} + q)^2}{(\bar{A} + a)^2}\right)^{n+1, m}\right] \\ &\left[(1-\theta)\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)^n + \theta\left(\frac{\partial(\bar{A} + a)}{\partial x}\right)^{n+1, m+1}\right] + \\ &\left[(1-\theta)(S_f - S_b)^n + \theta(S_f(\bar{A} + a, \bar{Q} + q) - S_b)^{n+1, m}\right]\left[(1-\theta)A^n + \theta(\bar{A}^{n+1} + a^{m+1})\right] \end{aligned} \quad (5.6.9)$$

Para desarrollar la ecuación (5.6.8), que es lineal, se pueden separar los términos que dependen de la solución exacta $(\bar{\bullet})^{n+1}$ y los términos de error en la estimación $(\bullet)^{n+1}$. Entonces se puede tener que:

$$\mathcal{L}^*(A^n, Q^n, \bar{A}^{n+1} + a^m, \bar{Q}^{n+1} + q^m) = \mathcal{L}^*(A^n, Q^n, \bar{A}^{n+1}, \bar{Q}^{n+1}) + \hat{\mathcal{L}}(a^m, q^m) \quad (5.6.10)$$

donde los operadores de $\mathcal{L}^*(\bullet)$ y $\hat{\mathcal{L}}(\bullet)$ de la ecuación (5.6.10) son:

$$\mathcal{L}^*(A^n, Q^n, \bar{A}^{n+1}, \bar{Q}^{n+1}) = \frac{\bar{A}^{n+1} - A^n}{\Delta t} + (1-\theta)\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)^n + \theta\left(\frac{\partial \bar{Q} + q}{\partial x}\right)^{n+1} \quad (5.6.11)$$

$$\hat{\mathcal{L}}(a^m, q^m) = \frac{a^m}{\Delta t} + \theta\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)^{m+1} \quad (5.6.12)$$

En el desarrollo específico de la ecuación (5.6.9) para los términos no lineales y con dependencia paramétrica, se puede hacer uso de una expansión en serie de Frechét-Taylor, de igual manera que se realizó para el estudio de propagación de perturbaciones (subcapítulo 5.2), con la diferencia que en este caso la



pequeña perturbación sobre la variable dependiente es el error que se tiene en la iteración m . Entonces, haciendo uso de las ecuaciones (5.2.7), (5.2.9) y (5.2.13) en la ecuación (5.6.6), y en el caso del tirante hidráulico $D(\bar{A}+a)$ se aplica una expansión serie de Frechét-Taylor similar a la desarrollada en la ecuación (5.2.9), separando además los términos que dependen de la solución exacta $(\bullet)^{n+1}$ y los términos de error en la estimación $(\bullet)^{m+1}$, se tiene que:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^*(A^n, Q^n, \bar{A}^{n+1} + a^m, \bar{Q}^{n+1} + q^m) &= \mathcal{M}^*(A^n, Q^n, \bar{A}^{n+1}, \bar{Q}^{n+1}) + \\ &\hat{\mathcal{M}}(A^n, Q^n, \bar{A}^{n+1}, \bar{Q}^{n+1}, a^{m+1}, q^{m+1}, a^m, q^m) + \quad (5.6.13) \\ &O\left[\left(\|a^{m+1}\|_D + \|q^{m+1}\|_D\right)^2 + \left(\|a^m\|_D + \|q^m\|_D\right)^2\right] \end{aligned}$$

donde los operadores de $\mathcal{M}^*(\bullet)$ y $\hat{\mathcal{M}}(\bullet)$ de la ecuación (5.6.13) son:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^*(A^n, Q^n, \bar{A}^{n+1}, \bar{Q}^{n+1}) &= \frac{\bar{Q}^{n+1} - Q^n}{\Delta t} + \\ &2\left[(1-\theta)\left(\frac{Q}{A}\right)^n + \theta\left(\frac{\bar{Q}}{\bar{A}}\right)^{n+1}\right]\left[\left(1-\theta\right)\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)^n + \theta\left(\frac{\partial \bar{Q}}{\partial x}\right)^{n+1}\right] + \\ &\left[(1-\theta)\left(gD - \frac{Q^2}{A^2}\right)^n + \theta\left(g\bar{D} - \frac{\bar{Q}^2}{\bar{A}^2}\right)^{n+1}\right]\left[\left(1-\theta\right)\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)^n + \theta\left(\frac{\partial \bar{A}}{\partial x}\right)^{n+1}\right] + \quad (5.6.14) \\ &\left[(1-\theta)(S_f - S_b)^n + \theta(\bar{S}_f - S_b)^{n+1}\right]\left[(1-\theta)A^n + \theta\bar{A}^{n+1}\right] \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 \hat{\mathcal{M}}\left(A^n, Q^n, \bar{A}^{n+1}, \bar{Q}^{n+1}, a^{m+1}, q^{m+1}, a^m, q^m\right) &= \frac{q^{m+1}}{\Delta t} + \\
 2\theta \left[-\left(\frac{\bar{Q}}{A}\right)^{n+1} a^m + \frac{q^m}{A^{n+1}} \right] &\left[(1-\theta)\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)^n + \theta\left(\frac{\partial \bar{Q}}{\partial x}\right)^{n+1} \right] + \\
 2\theta \left[(1-\theta)\left(\frac{\bar{Q}}{A}\right)^n + \theta\left(\frac{\bar{Q}}{A}\right)^{n+1} \right] &\left[\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)^{m+1} + \right. \\
 \theta \left[a^m \left(g\bar{D}_A - \frac{2\bar{Q}^2}{A^3} \right)^{n+1} + 2q^m \left(\frac{\bar{Q}}{A^2} \right)^{n+1} \right] &\left[(1-\theta)\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)^n + \theta\left(\frac{\partial \bar{A}}{\partial x}\right)^{n+1} \right] + \\
 \theta \left[(1-\theta)\left(gD - \frac{Q^2}{A^2} \right)^n + \theta\left(g\bar{D} - \frac{\bar{Q}^2}{A^2} \right)^{n+1} \right] &\left[\left(\frac{\partial a}{\partial x}\right)^{m+1} + \right. \\
 g\theta \left[a^m \bar{S}_{f_A} + q^m \bar{S}_{f_Q} \right] &\left[(1-\theta)A^n + \theta\bar{A}^{n+1} \right] + \\
 g\theta a^{m+1} \left[(1-\theta)(S_f - S_b)^n + \theta(\bar{S}_f - S_b)^{n+1, m} \right] &
 \end{aligned} \tag{5.6.15}$$

donde $\bar{D} = D(\bar{A})$ y $\bar{D}_A = (\partial D / \partial A)_{\bar{A}}$ son las variables de simplificación de la expansión en serie de Frechét-Taylor del tirante hidráulico.

Evidentemente $\mathcal{L}^*(A^n, Q^n, \bar{A}^{n+1}, \bar{Q}^{n+1}) = 0$ y $\mathcal{M}^*(A^n, Q^n, \bar{A}^{n+1}, \bar{Q}^{n+1}) = 0$ dado que A^n, Q^n, \bar{A}^{n+1} y \bar{Q}^{n+1} satisfacen en forma exacta las ecuaciones de referencia (5.6.4) y (5.6.5). Esto se debe a que estos valores de referencia permanecen invariables a medida que se realiza la actualización m , dado que los valores en el tiempo n son constantes independientemente de la iteración m que se esté calculando. Además, los valores para $n+1$ con barra son la solución exacta y no cambian durante el proceso de convergencia, y de igual manera sucede con los términos con dependencia paramétrica. De acuerdo con lo anterior

$$\tilde{\mathcal{L}}(a^m, q^m) = 0 \tag{5.6.16}$$

$$\begin{aligned}
 \hat{\mathcal{M}}\left(A^n, Q^n, \bar{A}^{n+1}, \bar{Q}^{n+1}, a^{m+1}, q^{m+1}, a^m, q^m\right) &+ \\
 O\left[\left(\|a^{m+1}\|_D + \|q^{m+1}\|_D \right)^2 + \left(\|a^m\|_D + \|q^m\|_D \right)^2 \right] &= 0
 \end{aligned} \tag{5.6.17}$$

Empleando una metodología de escalas múltiples y localización similar a la presentada en la sección 5.3 la ecuación (5.6.17) se puede escribir como:



$$\frac{q^{m+1}}{\Delta t} + 2\theta U_o \left(\frac{\partial q}{\partial x} \right)^{m+1} + \theta (gD_o - U_o^2) \left(\frac{\partial a}{\partial x} \right)^{m+1} + g\theta A_o [a^m S_{f_{A_o}} + q^m S_{f_{Q_o}}] = 0 \quad (5.6.18)$$

donde A_o y Q_o respectivamente representan valores localizados de A^n y \bar{A}^{n+1} , y de Q^n y \bar{Q}^{n+1} .

Entonces, para construir el esquema completo de Preissmann para evaluar la convergencia de las iteraciones no lineales se aplica una discretización espacial al sistema de ecuaciones (5.6.16) y (5.6.18) de forma que:

$$(1 - \psi)a_j^{m+1} + \psi a_{j+1}^{m+1} + \theta \lambda (q_{j+1}^{m+1} - q_j^{m+1}) = 0 \quad (5.6.19)$$

$$(1 - \psi)q_j^{m+1} + \psi q_{j+1}^{m+1} + 2U_o \theta \lambda (q_{j+1}^{m+1} - q_j^{m+1}) + \theta \lambda (gD_o - U_o^2) (a_{j+1}^{m+1} - a_j^{m+1}) - \quad (5.6.20)$$

$$- 2I \left[1 + \frac{V_e}{F_r} \right] \theta [(1 - \psi)a_j^m + \psi a_{j+1}^m] + \frac{2I\theta}{U_o} [(1 - \psi)q_j^m + \psi q_{j+1}^m] = 0$$

donde $I = gS_{f_o} \Delta t$; V_e es el número de Vedernikov y F_r el número de Froude.

En la ecuación(5.6.18) se han sustituido las variables $S_{f_{A_o}}$ y $S_{f_{Q_o}}$ por las relaciones (4.1.99) y (4.1.100), además en (5.6.16) y (5.6.17) se han despreciado los términos superiores al lineal, con lo cual se obtiene un sistema lineal y de coeficientes constantes, que puede solucionarse aplicando el método de Fourier. Entonces, si se busca una solución para cada modo de Fourier que permita analizarlo en forma independiente, se puede proponer que

$$a_j^m = \hat{a}_k \rho_k^m e^{i\beta_k j \Delta x} \quad (5.6.21)$$

$$q_j^m = \hat{q}_k \rho_k^m e^{i\beta_k j \Delta x} \quad (5.6.22)$$

donde \hat{a}_k, \hat{q}_k representan las amplitudes para el k -ésimo modo Fourier; ρ_k^m el factor de amplitud modificado asociado con el k -ésimo modo; $i \equiv \sqrt{-1}$ y $\beta \in (-\pi, \pi)$ es el número de onda adimensional que corresponde para k -ésimo modo. Sustituyendo las ecuaciones (5.6.21) y (5.6.22) en (5.6.19) y en (5.6.20), y desarrollando:

$$\begin{bmatrix} c + is(2\psi - 1) & 2i\theta\lambda s \\ 2i\theta\lambda s(gD_o - U_o^2) - & [c + is(2\psi - 1)] \left(\rho + \frac{2I\theta}{U_o} \right) \\ 2\theta I \left(1 + \frac{V_e}{F_r} \right) [c + is(2\psi - 1)] & 4iU_o \lambda \theta \rho s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{a}_k \\ \hat{q}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.6.23)$$

donde $s = \text{sen}(\beta_k x)$ y $c = \text{cos}(\beta_k x)$.

Una solución del sistema (5.6.23) homogéneo se puede elaborar calculando el determinante e igualando a cero de forma que:



$$\rho_k \left\{ [c + is(2\psi - 1)]^2 + 4iU_o\theta\lambda s [c + is(2\psi - 1)] + 4\theta^2\lambda^2 s^2 (gD_o - U_o^2) \right\} + \frac{2\theta I}{U_o} [c + is(2\psi - 1)]^2 + 4i\theta^2\lambda s I \left(1 + \frac{V_e}{F_r} \right) [c + is(2\psi - 1)] = 0 \quad (5.6.24)$$

Y la relación de dispersión del sistema (5.6.23) es:

$$\rho_k = \frac{-\frac{2\theta I}{U_o} [c + is(2\psi - 1)]^2 - 4i\theta^2\lambda s I \left(1 + \frac{V_e}{F_r} \right) [c + is(2\psi - 1)]}{[c + is(2\psi - 1)]^2 + 4iU_o\theta\lambda s [c + is(2\psi - 1)] + 4\theta^2\lambda^2 s^2 (gD_o - U_o^2)} \quad (5.6.25)$$

En el subcapítulo 5.4 se determinó que una condición de estabilidad del esquema de Preissmann es $\psi = 1/2$. Entonces la relación de dispersión (5.6.25) se puede escribir como:

$$\rho_k = \frac{-\frac{2\theta I c^2}{U_o} - 4i\theta^2\lambda s I \left(1 + \frac{V_e}{F_r} \right)}{c^2 + 4\theta^2\lambda^2 s^2 (gD_o - U_o^2) + 4iU_o\theta\lambda s c} \quad (5.6.26)$$

La condición de convergencia de las iteraciones de Picard del esquema de Preissman se define como $|\rho_k| < 1$ para cualquier modo arbitrario de Fourier (Aldama y Paniconi, 1991), que al ser aplicada a la relación de dispersión (5.6.26) permite concluir que: a) En el caso de considerar un flujo ideal sin fricción $I = 0$ se tiene $|\rho_k| = 0$; b) para el número de onda de Nyquist ($\beta_k \rightarrow \pi$) se tiene $|\rho_k| \rightarrow 0$, ambos resultados indican convergencia, y c) en caso de frecuencia $\beta_k = 0$ se tiene una condición de convergencia, que se expresa de la forma siguiente:

$$\Delta t = \frac{U_o}{2gS_{f_o}\theta} \quad (5.6.27)$$

Para evaluar el resultado del análisis de convergencia del esquema de Preissmann, utilizando el método iterativo de Picard, se muestran a continuación los retratos de amplitud para diferentes tipos de régimen. La secuencia de clasificación de los retratos de amplitud se puede consultar en las tablas 5.6 y 5.7, los cuales se definen para:

Condición de flujo subcrítico:

Para cada retrato de amplitud se consideraron los números de Courant $C_r = \{0.01, 0.11, 2, 5, 10, 30, 50, 75, 150\}$, con las condiciones de topología y flujo especificadas en la tabla 5.1 y la clasificación se puede consultar en la tabla 5.8.



Nombre de identificación del retrato de amplitud	Valores de los factores de Peso	
	θ	ψ
Ret_amp_Fs01PrPi	0.5	0.5
Ret_amp_Fs02PrPi	0.6	0.5
Ret_amp_Fs03PrPi	0.7	0.5
Ret_amp_Fs04PrPi	0.8	0.5
Ret_amp_Fs05PrPi	0.9	0.5
Ret_amp_Fs06PrPi	1.0	0.5

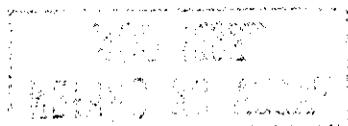
Tabla 5.8. Clasificación de los retratos de amplitud para
flujo subcrítico del esquema de Preissmann, bajo la iteración de Picard.

Condición de flujo supercrítico

En este caso se analizaron los retratos de amplitud para los mismos números de Courant que para flujo subcrítico, la clasificación se puede consultar en la tabla 5.9. Las condiciones topológicas y de flujo son las especificadas en la tabla 5.3.

Nombre de identificación del retrato de amplitud	Valores de los factores de Peso	
	θ	ψ
Ret_amp_Ft01PrPi	0.5	0.5
Ret_amp_Ft02PrPi	0.6	0.5
Ret_amp_Ft03PrPi	0.7	0.5
Ret_amp_Ft04PrPi	0.8	0.5
Ret_amp_Ft05PrPi	0.9	0.5
Ret_amp_Ft06PrPi	1.0	0.5

Tabla 5.9. Clasificación de los retratos de amplitud para flujo
supercrítico del esquema de Preissmann, bajo la iteración de Picard.



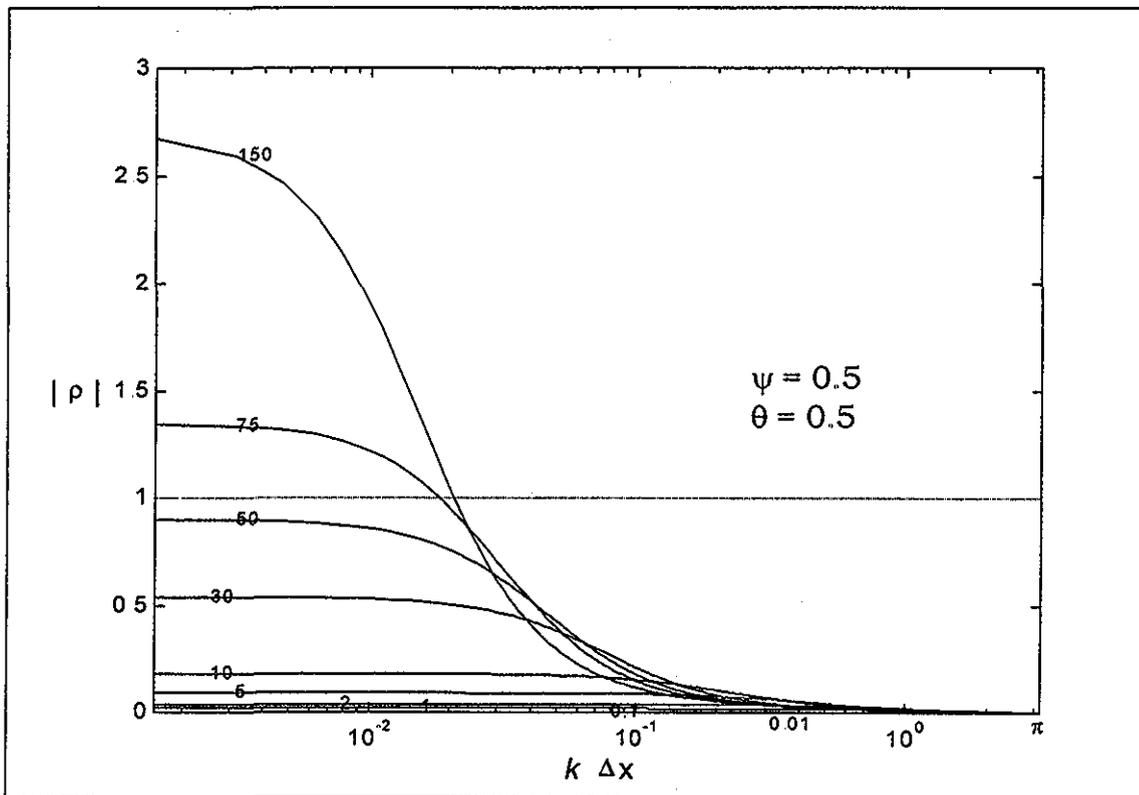


Lámina 5.35. Caso Ret_amp_Fs01PrPi.

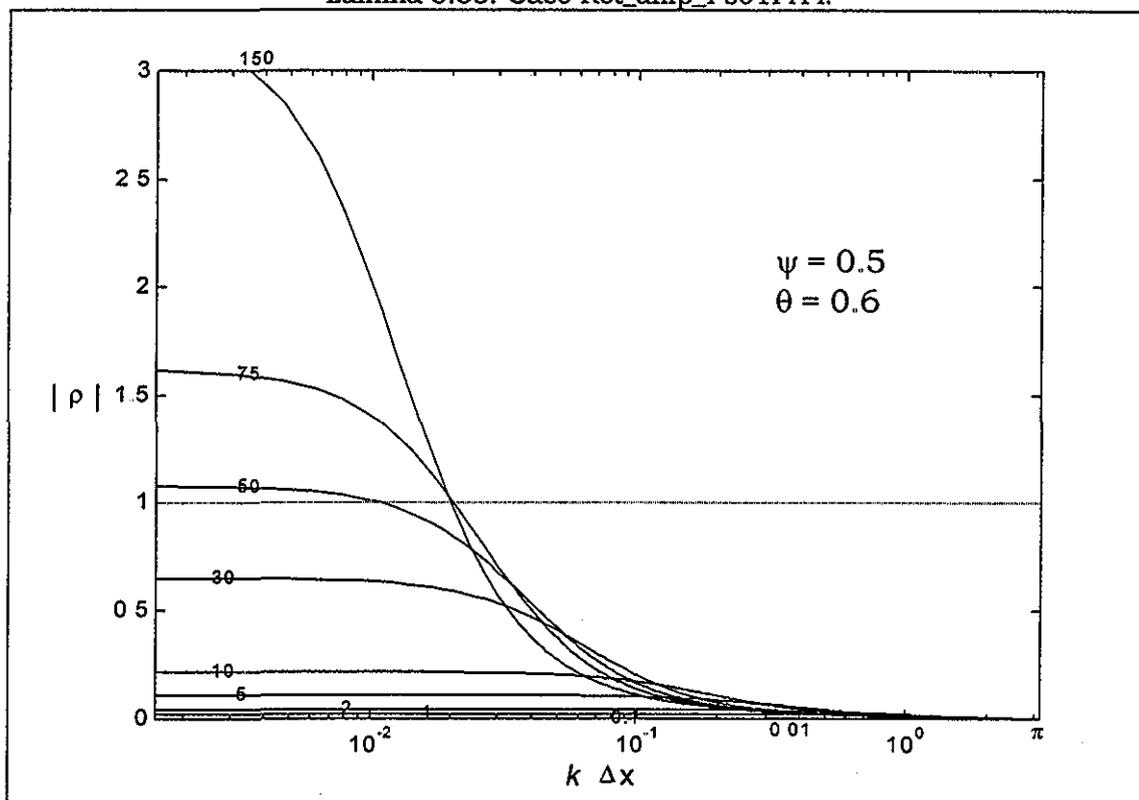


Lámina 5.36. Caso Ret_amp_Fs02PrPi.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

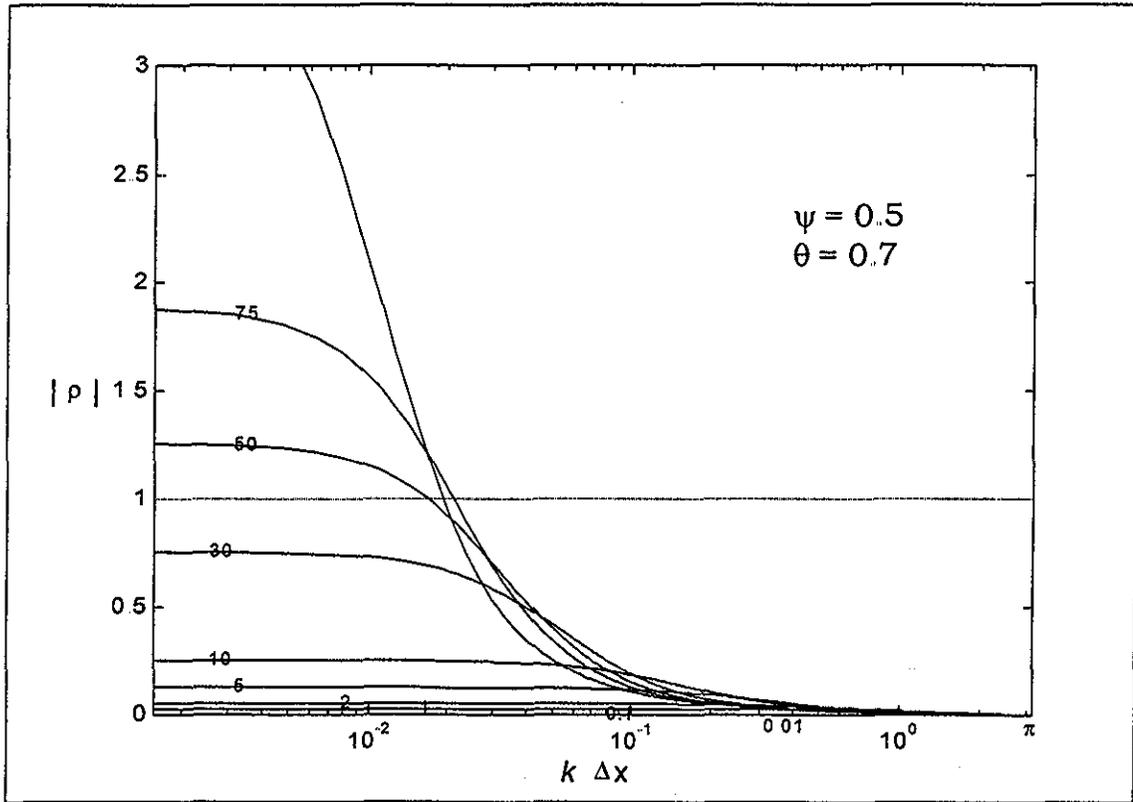


Lámina 5.37. Caso Ret_amp_Fs03PrPi.

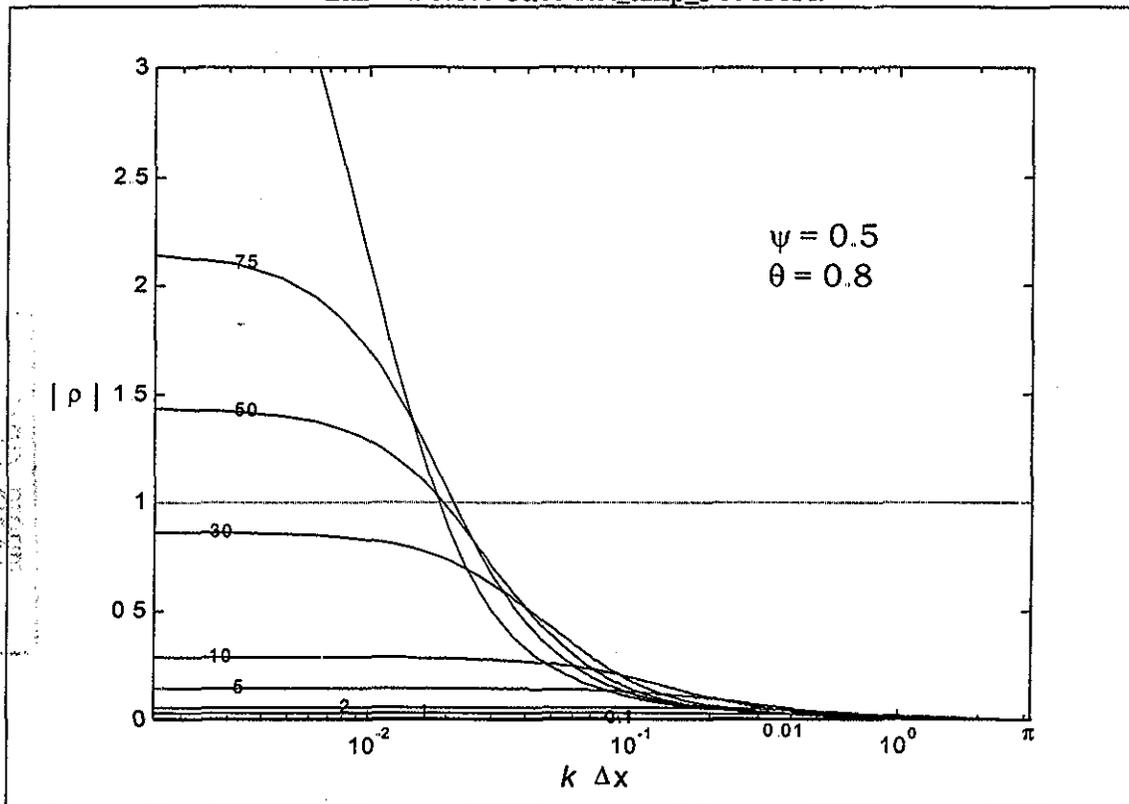


Lámina 5.38. Caso Ret_amp_Fs04PrPi.

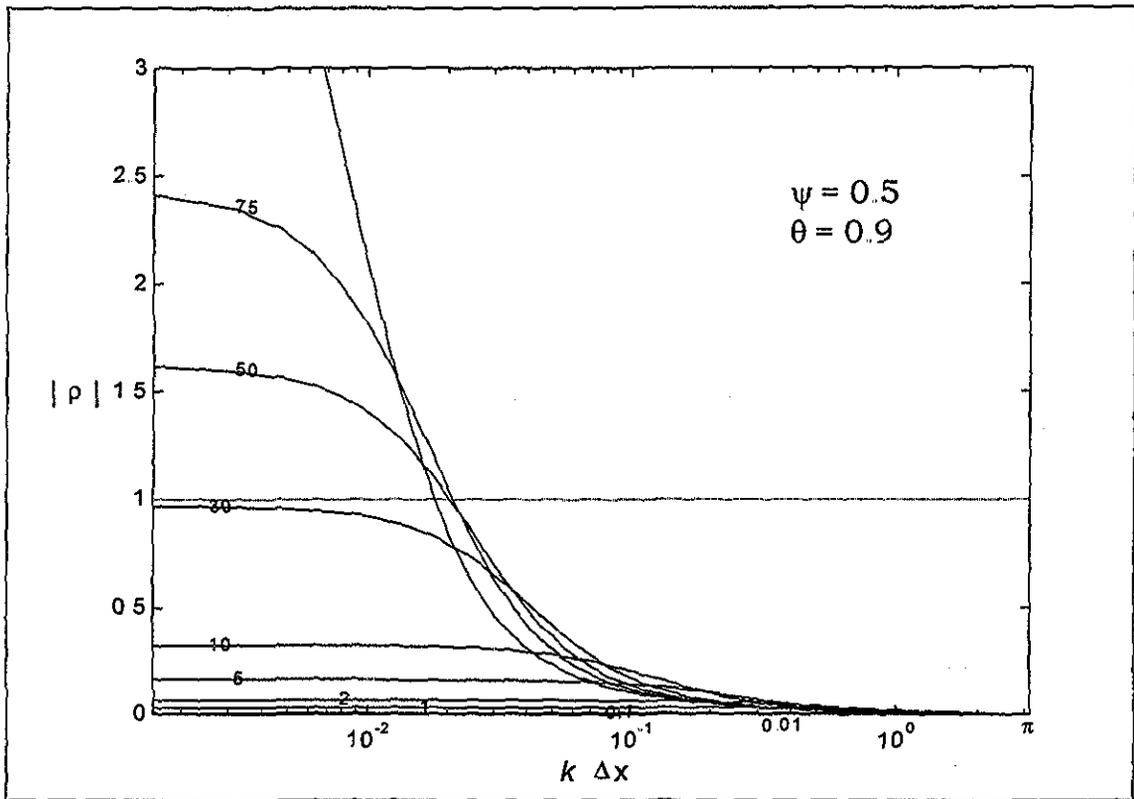


Lámina 5.39. Caso Ret_amp_Fs05PrPi.

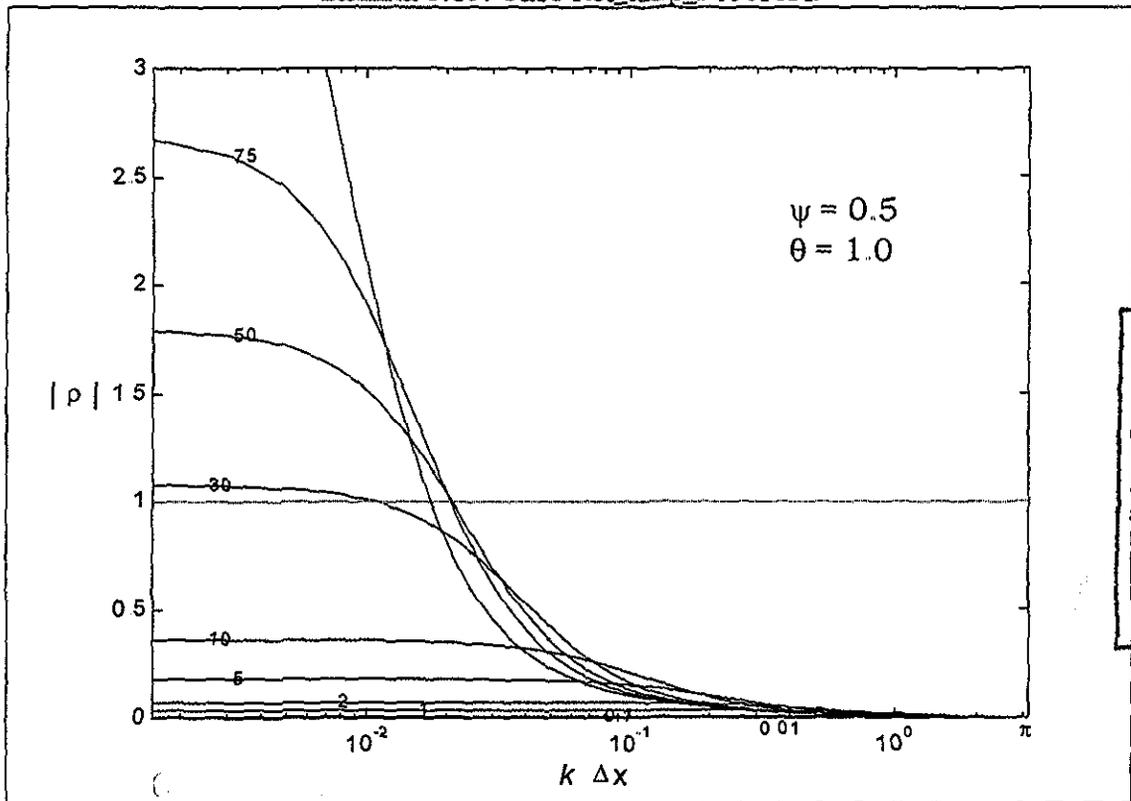


Lámina 5.40. Caso Ret_amp_Fs06PrPi.

TESIS CON FALLA DE ORIGEN



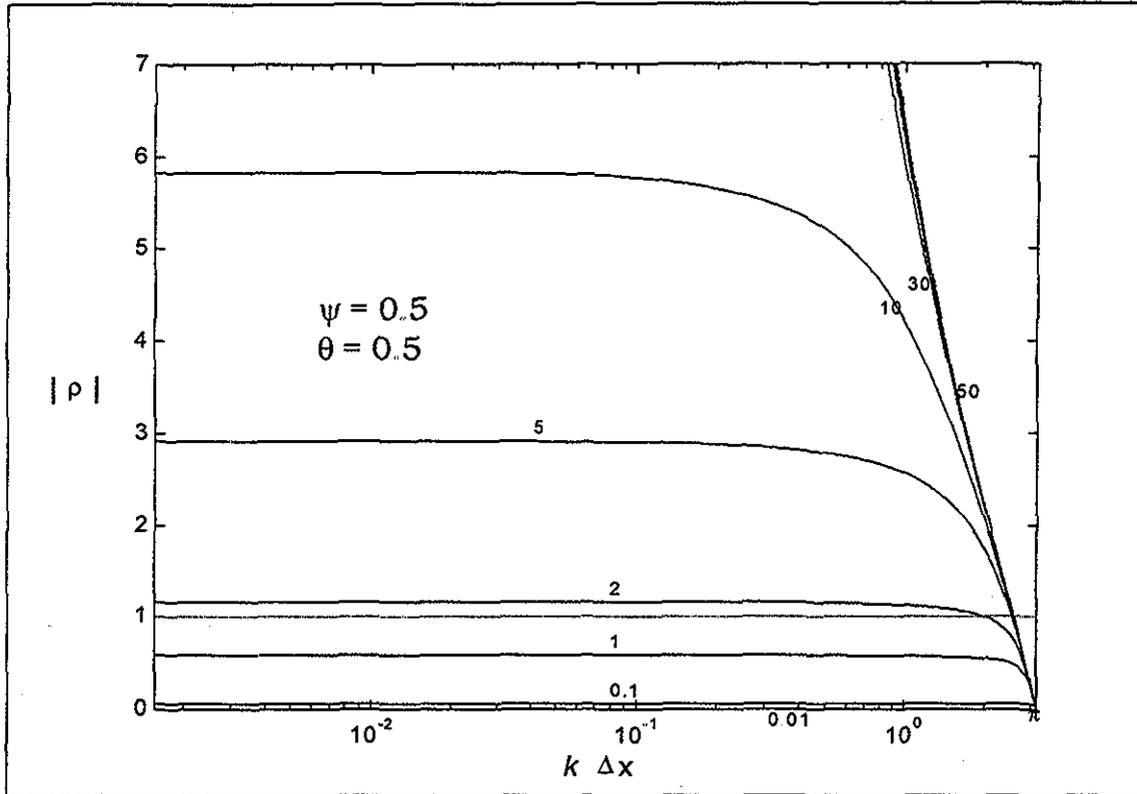


Lámina 5.41. Caso Ret_amp_Ft01PrPi.

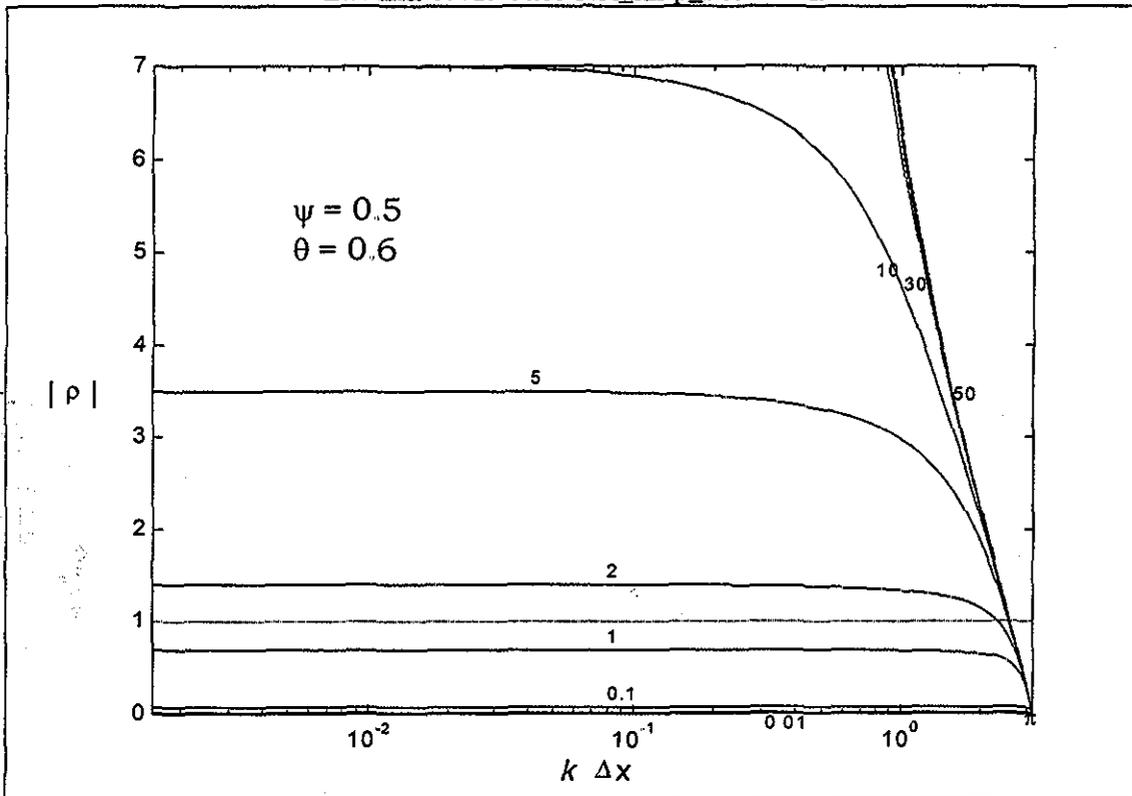


Lámina 5.42. Caso Ret_amp_Ft02PrPi.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

RECIBIDO
BIBLIOTECA DE LA
UNIVERSIDAD DE CALDAS

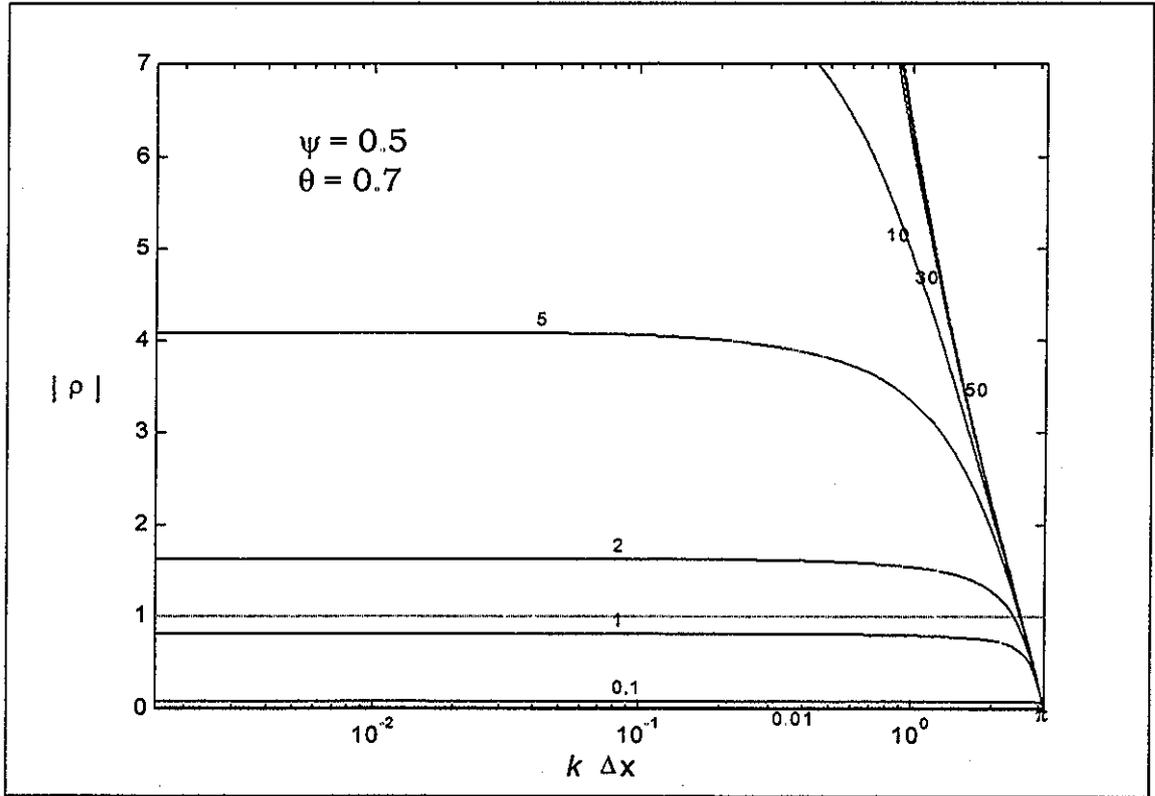


Lámina 5.43. Caso Ret_amp_Ft03PrPi.

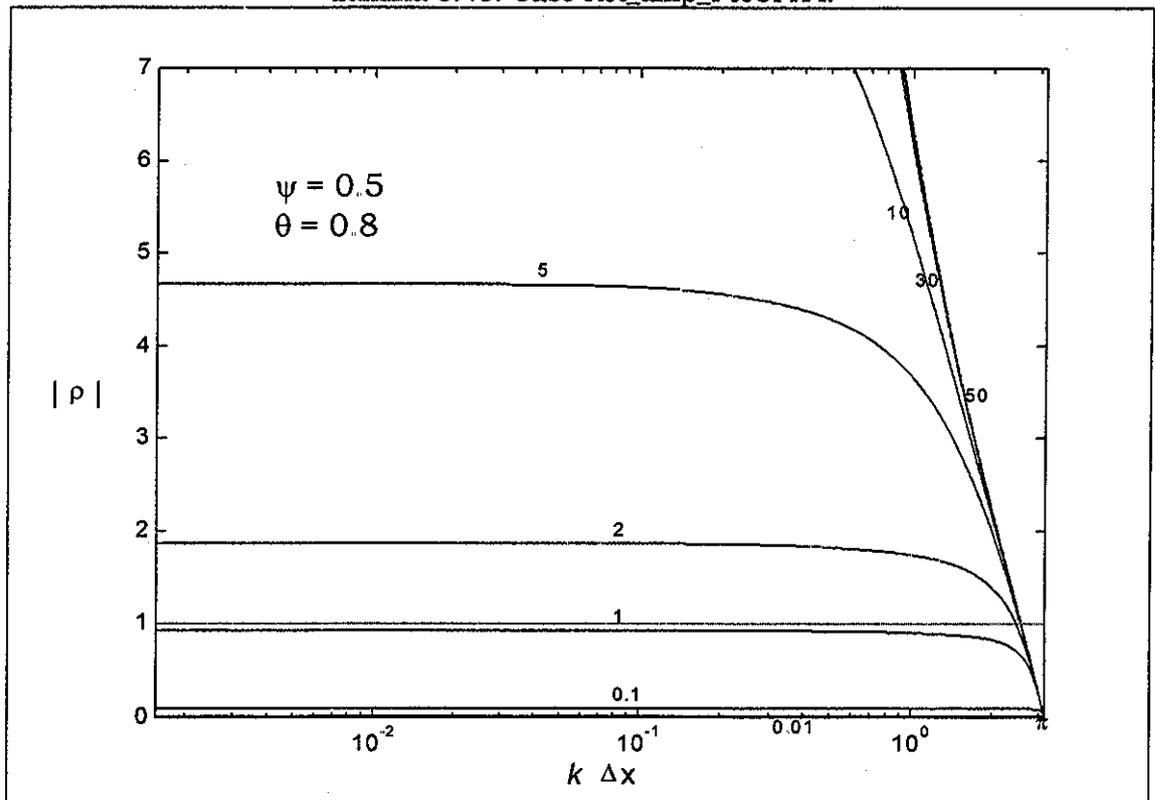


Lámina 5.44. Caso Ret_amp_Ft04PrPi.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

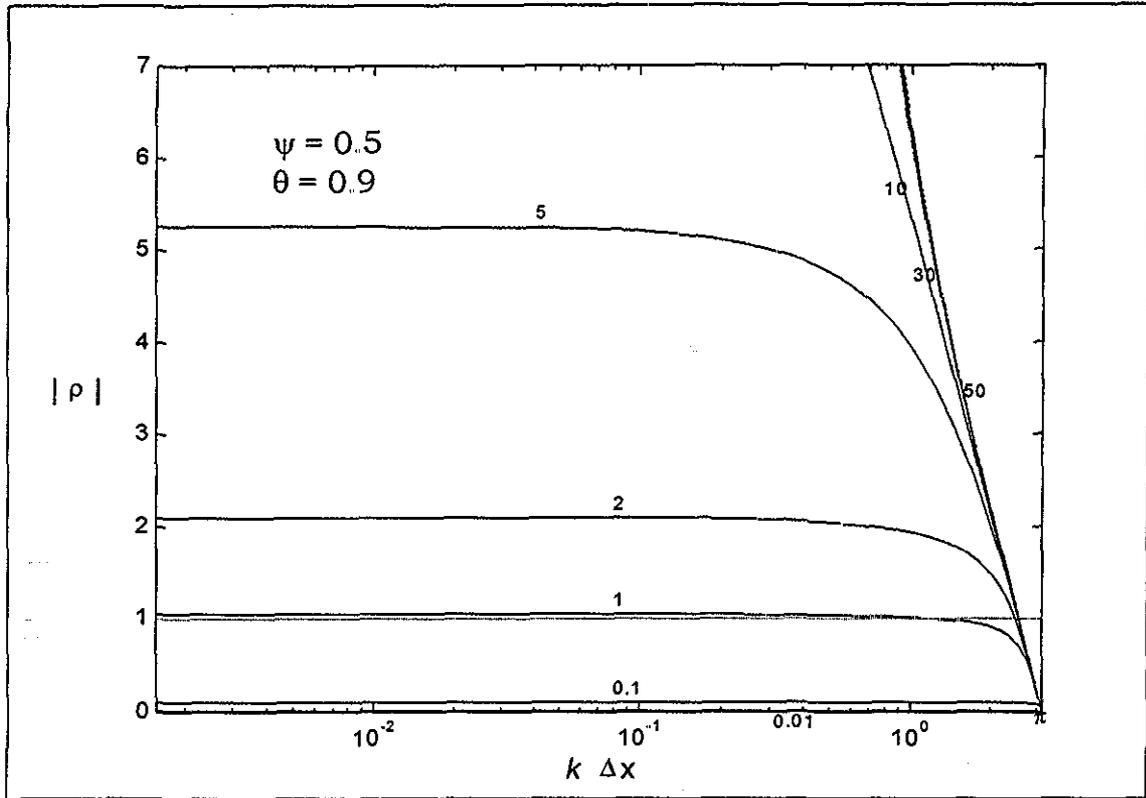


Lámina 5.45. Caso Ret_amp_Ft05PrPi.

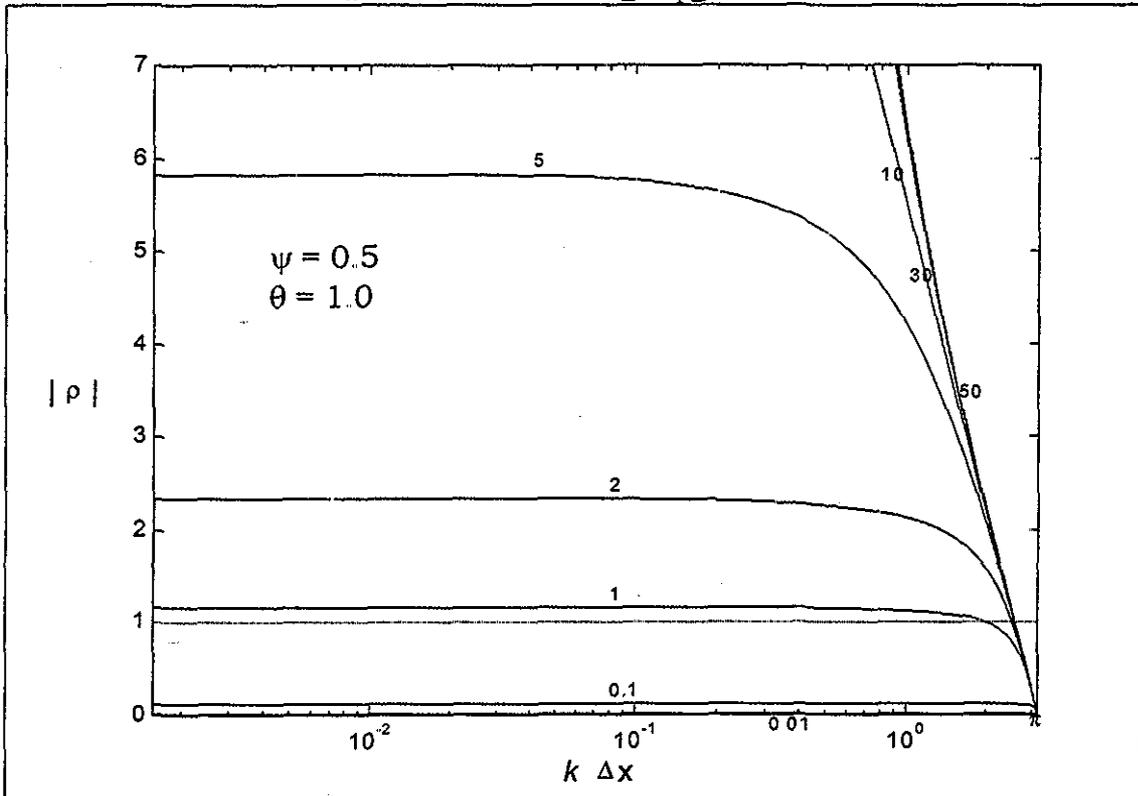


Lámina 5.46. Caso Ret_amp_Ft06PrPi.

TESIS CON FALLA DE ORIGEN



$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{Ne}^* (A_j^n, Q_j^n, A_j^{n+1,m+1}, Q_j^{n+1,m+1}) &= \mathcal{M}_{Pi}^* (A_j^n, Q_j^n, A_j^{n+1,m+1}, Q_j^{n+1,m+1}) + \\ & (A_j^{n+1,m+1} - A_j^{n+1,m}) \Xi^* (A_j^n, Q_j^n, A_j^{n+1,m}, Q_j^{n+1,m}) + \\ & (Q_j^{n+1,m+1} - Q_j^{n+1,m}) \Theta^* (A_j^n, Q_j^n, A_j^{n+1,m}, Q_j^{n+1,m}) \end{aligned} \quad (5.7.12)$$

donde n es el intervalo de tiempo; m es el identificador de actualización de los términos no lineales, θ es el factor de peso temporal, y la discretización de Ξ^* y Θ^* son:

$$\begin{aligned} \Xi^* (A_j^n, Q_j^n, A_j^{n+1,m}, Q_j^{n+1,m}) &= \\ & -2 \left[(1-\theta) \left(\frac{Q}{A^2} \right)^n + \theta \left(\frac{Q}{A^2} \right)^{n+1,m} \right] \left[(1-\theta) \left(\frac{\partial Q}{\partial x} \right)^n + \theta \left(\frac{\partial Q}{\partial x} \right)^{n+1,m} \right] + \\ & 2 \left[(1-\theta) \left(\frac{Q^2}{A^3} \right)^n + \theta \left(\frac{Q^2}{A^3} \right)^{n+1,m} \right] \left[(1-\theta) \left(\frac{\partial A}{\partial x} \right)^n + \theta \left(\frac{\partial A}{\partial x} \right)^{n+1,m} \right] + \\ & g \left[(1-\theta) \left(\frac{\partial D}{\partial x} \right)^n + \theta \left(\frac{\partial D}{\partial x} \right)^{n+1,m} \right] + \\ & g \left[(1-\theta) (S_f - S_b + AS_{fA})^n + \theta (S_f - S_b + AS_{fA})^{n+1,m} \right] \end{aligned} \quad (5.7.13)$$

$$\begin{aligned} \Theta^* (A_j^n, Q_j^n, A_j^{n+1,m}, Q_j^{n+1,m}) &= \\ & 2 \left[(1-\theta) \frac{1}{A^n} + \theta \frac{1}{A^{n+1,m}} \right] \left[(1-\theta) \left(\frac{\partial Q}{\partial x} \right)^n + \theta \left(\frac{\partial Q}{\partial x} \right)^{n+1,m} \right] + \\ & -2 \left[(1-\theta) \left(\frac{Q}{A^2} \right)^n + \theta \left(\frac{Q}{A^2} \right)^{n+1,m} \right] \left[(1-\theta) \left(\frac{\partial A}{\partial x} \right)^n + \theta \left(\frac{\partial A}{\partial x} \right)^{n+1,m} \right] + \\ & g \left[(1-\theta) AS_{fQ}^n + \theta AS_{fQ}^{n+1,m} \right] \end{aligned} \quad (5.7.14)$$

De manera similar al desarrollo del subcapítulo anterior, para determinar la propagación del error en cada iteración m en (5.7.12), debe considerarse que el valor actual de las variables dependientes tienen una pequeña diferencia con respecto a la solución exacta (ecuaciones 5.6.6 y 5.6.7), entonces sustituyendo (5.6.6) y (5.6.7) en (5.7.12) se tiene

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{Ne}^* (A_j^n, Q_j^n, A_j^{n+1,m+1}, Q_j^{n+1,m+1}) &= \mathcal{M}_{Pi}^* (A_j^n, Q_j^n, A_j^{n+1,m+1}, Q_j^{n+1,m+1}) + \\ & (a^{m+1} - a^m) \Xi^* (A_j^n, Q_j^n, \bar{A}_j^{n+1} + a^m, \bar{Q}_j^{n+1} + q^m) + \\ & (q^{m+1} - q^m) \Theta^* (A_j^n, Q_j^n, \bar{A}_j^{n+1} + a^m, \bar{Q}_j^{n+1} + q^m) \end{aligned} \quad (5.7.15)$$





Además, para evaluar los términos no lineales y con dependencia paramétrica en la ecuación (5.7.15), se puede utilizar una expansión en serie de Fréchet-Taylor con un procedimiento similar al que se siguió para la ecuación de cantidad de movimiento (5.6.13). Entonces haciendo uso de las ecuaciones (5.2.7), (5.2.9) y (5.2.13) en la ecuación (5.7.15), y para el caso de los términos $\Xi^*(A_j^n, Q_j^n, \bar{A}_j^{n+1} + a^m, \bar{Q}_j^{n+1} + q^m)$ y $\Theta^*(A_j^n, Q_j^n, \bar{A}_j^{n+1} + a^m, \bar{Q}_j^{n+1} + q^m)$, se puede aplicar nuevamente una expansión en serie de Fréchet-Taylor; pero, en este caso, similar a la utilizada para la evaluación de la propagación de perturbaciones del término de fricción (ecuación 5.2.12). Además, escribiendo los términos que dependen de la solución exacta como $(\bar{\bullet})^{n+1}$, y los términos de error en la estimación $(\bullet)^{m+1}$, entonces se tiene

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{Ne}^*(A_j^n, Q_j^n, A_j^{n+1,m+1}, Q_j^{n+1,m+1}) &= \mathcal{M}_{Pi}^*(A^n, Q^n, \bar{A}^{n+1}, \bar{Q}^{n+1}) + \\ &\quad \hat{\mathcal{M}}_R(A^n, Q^n, \bar{A}^{n+1}, \bar{Q}^{n+1}, a^{m+1}, q^{m+1}, a^m, q^m) + \\ &\quad (a^{m+1} - a^m) \Xi^*(A_j^n, Q_j^n, \bar{A}_j^{n+1}, \bar{Q}_j^{n+1}) + \\ &\quad (q^{m+1} - q^m) \Theta^*(A_j^n, Q_j^n, \bar{A}_j^{n+1}, \bar{Q}_j^{n+1}) + \\ &\quad O\left[\left(\|a^{m+1}\|_D + \|q^{m+1}\|_D\right)^2 + \left(\|a^m\|_D + \|q^m\|_D\right)^2\right] \end{aligned} \tag{5.7.16}$$

donde $\mathcal{M}_{Pi}^*(A^n, Q^n, \bar{A}^{n+1}, \bar{Q}^{n+1})$ y $\hat{\mathcal{M}}_R(A^n, Q^n, \bar{A}^{n+1}, \bar{Q}^{n+1}, a^{m+1}, q^{m+1}, a^m, q^m)$ son operadores que se evalúan según las ecuaciones (5.6.14) y (5.6.15).

El operador $\mathcal{M}_{Pi}^*(A^n, Q^n, \bar{A}^{n+1}, \bar{Q}^{n+1})$ satisface en forma exacta las ecuaciones de referencia (5.6.5), por lo que su valor es nulo, debido a que los valores de referencia A^n, Q^n, \bar{A}^{n+1} y \bar{Q}^{n+1} permanecen invariables a medida que se realiza la actualización m , dado que los valores en el tiempo n son constantes independientemente de la iteración m que se calcule y los valores para $n+1$ con barra son la solución exacta, la cual no cambia durante el proceso de convergencia. De igual manera sucede con los términos con dependencia paramétrica, tomando en cuenta lo anterior la ecuación (5.7.16) se puede escribir como:



$$\begin{aligned} & \hat{\mathcal{M}}_R \left(A^n, Q^n, \bar{A}^{n+1}, \bar{Q}^{n+1}, a^{m+1}, q^{m+1}, a^m, q^m \right) + \\ & (a^{m+1} - a^m) \Xi^* \left(A_j^n, Q_j^n, \bar{A}_j^{n+1}, \bar{Q}_j^{n+1} \right) + \\ & (q^{m+1} - q^m) \Theta^* \left(A_j^n, Q_j^n, \bar{A}_j^{n+1}, \bar{Q}_j^{n+1} \right) + \\ & O \left[\left(\|a^{m+1}\|_D + \|q^{m+1}\|_D \right)^2 + \left(\|a^m\|_D + \|q^m\|_D \right)^2 \right] = 0 \end{aligned} \quad (5.7.17)$$

Llevando a cabo un análisis de escalas múltiples y localización similar a la presentada en la sección 5.3 y 5.6 la ecuación (5.7.17) se puede escribir como:

$$\begin{aligned} & \frac{q^{m+1}}{\Delta t} + 2\theta U_o \left(\frac{\partial q}{\partial x} \right)^{m+1} + \theta (gD_o - U_o^2) \left(\frac{\partial a}{\partial x} \right)^{m+1} + g\theta A_o [a^m S_{f_{A_o}} + q^m S_{f_{Q_o}}] + \\ & g A_o S_{f_{A_o}} (a^{m+1} - a^m) + g A_o S_{f_{Q_o}} (q^{m+1} - q^m) = 0 \end{aligned} \quad (5.7.18)$$

donde A_o y Q_o respectivamente representan los valores localizados de A^n y \bar{A}^{n+1} , y de Q^n y \bar{Q}^{n+1} .

Entonces, para construir el esquema completo de Preissmann para evaluar la convergencia sobre las iteraciones no lineales por la metodología de Newton-Raphson se aplica una discretización espacial al sistema de ecuaciones (5.6.12) y (5.7.18) de forma que:

$$(1 - \psi) a_j^{m+1} + \psi a_{j+1}^{m+1} + \theta \lambda (q_{j+1}^{m+1} - q_j^{m+1}) = 0 \quad (5.7.19)$$

$$\begin{aligned} & (1 - \psi) q_j^{m+1} + \psi q_{j+1}^{m+1} + 2U_o \theta \lambda (q_{j+1}^{m+1} - q_j^{m+1}) + \theta \lambda (gD_o - U_o^2) (a_{j+1}^{m+1} - a_j^{m+1}) - \\ & - 2I \left[1 + \frac{V_e}{F_r} \right] \theta \left[(1 - \psi) a_j^m + \psi a_{j+1}^m \right] + \frac{2I\theta}{U_o} \left[(1 - \psi) q_j^m + \psi q_{j+1}^m \right] - \\ & 2I \left[1 + \frac{V_e}{F_r} \right] \left[(1 - \psi) a_j^{m+1} + \psi a_{j+1}^{m+1} - (1 - \psi) a_j^m - \psi a_{j+1}^m \right] - \\ & \frac{2I\theta}{U_o} \left[(1 - \psi) q_j^{m+1} + \psi q_{j+1}^{m+1} - (1 - \psi) q_j^m - \psi q_{j+1}^m \right] = 0 \end{aligned} \quad (5.7.20)$$

donde $I = gS_f \Delta t$; V_e es el número de Vedernikov y F_r el número de Froude.

Debido a que el sistema (5.7.19) y (5.7.20) es lineal y de coeficientes constantes, es posible solucionarlo aplicando el método de Fourier. Entonces si se busca una solución para cada modo de Fourier que permita analizarlo en forma independiente, se puede proponer hacer uso de las expansiones discretas de Fourier (5.6.19), (5.6.20), que al sustituirlas en (5.7.19) y (5.7.20), y desarrollando, se tiene:



$$\begin{bmatrix}
 c + is(2\psi - 1) & 2i\theta\lambda s \\
 2i\theta\lambda sp(gD_o - U_o^2) - & [c + is(2\psi - 1)]\left(\rho + \frac{2I\theta}{U_o}\right) + \\
 2\theta I\left(1 + \frac{V_e}{F_r}\right)[c + is(2\psi - 1)] - & 4iU_o\lambda\theta\rho s + \\
 (\rho - 1)[c + is(1 - 2\psi)]2I\left(1 + \frac{V_e}{F_r}\right) & (\rho - 1)[c + is(1 - 2\psi)]\frac{2I}{U_o}
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 \hat{a}_k \\
 \hat{q}_k
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 0 \\
 0
 \end{bmatrix}
 \quad (5.7.21)$$

donde $s = \text{sen}(\beta_k x)$ y $c = \text{cos}(\beta_k x)$.

Entonces calculando el determinante e igualando a cero, se obtiene la relación de dispersión del sistema (5.7.21):

$$\begin{aligned}
 \rho_k = & \left\{ -\frac{2\theta I}{U_o} [c + is(2\psi - 1)]^2 - 4i\theta^2\lambda s I \left(1 + \frac{V_e}{F_r}\right) [c + is(2\psi - 1)] + \right. \\
 & \left. [c^2 + s^2(2\psi - 1)^2] \frac{2I}{U_o} + 4i\theta\lambda s [c + is(1 - 2\psi)] I \left(1 + \frac{V_e}{F_r}\right) \right\} \\
 & \left\{ [c + is(2\psi - 1)]^2 + 4iU_o\theta\lambda s [c + is(2\psi - 1)] + 4\theta^2\lambda^2 s^2 (gD_o - U_o^2) + \right. \\
 & \left. [c^2 + s^2(2\psi - 1)^2] \frac{2I}{U_o} + 4i\theta\lambda s [c + is(1 - 2\psi)] I \left(1 + \frac{V_e}{F_r}\right) \right\}^{-1}
 \end{aligned}
 \quad (5.7.22)$$

Una condición de estabilidad incondicional del esquema de Preissmann es $\psi = 1/2$ (subcapítulo 5.4). En ese caso la relación de dispersión (5.7.22) se puede escribir como:

$$\rho_k = \frac{\frac{2Ic^2}{U_o}(\theta - 1) + 4i\theta(1 - \theta)\lambda sc I \left(1 + \frac{V_e}{F_r}\right)}{c^2 \left(1 + \frac{2I}{U_o}\right) + 4\theta^2\lambda^2 s^2 (gD_o - U_o^2) + 4i\theta\lambda sc \left[U_o + I \left(1 + \frac{V_e}{F_r}\right)\right]}
 \quad (5.7.23)$$

La condición de convergencia de las iteraciones de Newton-Rapson, del esquema de Preissman, está definida para $|\rho_k| < 1$. Al aplicarla en la relación de dispersión (5.7.23), se concluye que: a) En el caso de considerar un flujo ideal sin fricción $I = 0$ se tiene $|\rho_k| = 0$; b) para la frecuencia de Nyquist se tiene $|\rho_k| \rightarrow 0$, ambos resultados indican convergencia, y c) en caso de frecuencia $\beta_k = 0$ se tiene una condición de convergencia condicionada, que se expresa de la forma siguiente:



$$\frac{4I^2\theta}{U_0^2}(\theta - 2) - \frac{4I}{U_0} < 1 \tag{5.7.24}$$

En la inecuación anterior se puede observar que si los valores del factor de peso temporal son $\theta \in [0,1]$, aplicada en la expresión (5.7.24) siempre se cumple. Para otros valores de β_k es necesario determinar $|\rho_k|$ a fin de evaluar la convergencia del método. No obstante para $\theta = 1$ (esquema totalmente implícito) de (5.7.23) se obtiene $\rho_k = 0$, lo cual indica convergencia incondicional.

Para evaluar el resultado del análisis de convergencia del esquema de Preissmann utilizando el método iterativo de Newton-Raphson, se muestran a continuación los retratos de amplitud para diferentes tipos de régimen. La secuencia de clasificación de los retratos de amplitud se puede consultar en las tablas 5.10 y 5.11, los cuales se definen para:

Condición de flujo subcrítico:

Los retratos de amplitud para flujo subcrítico bajo las condiciones especificadas en la tabla 5.1 y para los números de Courant $C_r = \{0.01, 0.11, 2, 5, 10, 30, 50, 75, 150\}$, se clasifican en la tabla 5.10.

Nombre de identificación del retrato de amplitud	Valores de los factores de Peso	
	θ	ψ
Ret_amp_Fs01PrNe	0.5	0.5
Ret_amp_Fs02PrNe	0.6	0.5
Ret_amp_Fs03PrNe	0.7	0.5
Ret_amp_Fs04PrNe	0.8	0.5
Ret_amp_Fs05PrNe	0.9	0.5
Ret_amp_Fs06PrNe	1.0	0.5

Tabla 5.10. Clasificación de los retratos de amplitud para flujo subcrítico del esquema de Preissmann, bajo la iteración de Newton-Raphson.

Se puede observar en la relación de dispersión (5.7.21) que para un valor $\theta = 1$ el valor de la amplitud es $|\rho_k| = 0$, entonces el retrato de amplitud Ret_amp_Fs06PrNe no es necesario realizar la gráfica.



Condición de flujo supercrítico:

De manera similar para cada retrato de amplitud se consideran los números de Courant $C_r = \{0.01, 0.11, 2, 5, 10, 30, 50, 75, 150\}$ (tabla 5.11), donde la condiciones de flujo se especifican en la tabla 5.3.

Nombre de identificación del retrato de amplitud	Valores de los factores de Peso	
	θ	ψ
Ret_amp_Ft01PrNe	0.5	0.5
Ret_amp_Ft02PrNe	0.6	0.5
Ret_amp_Ft03PrNe	0.7	0.5
Ret_amp_Ft04PrNe	0.8	0.5
Ret_amp_Ft05PrNe	0.9	0.5
Ret_amp_Ft06PrNe	1.0	0.5

Tabla 5.11. Clasificación de los retratos de amplitud para flujo supercrítico del esquema de Preissmann, bajo la iteración de Newton-Raphson.

De igual manera que en el caso de flujo subcrítico para un valor $\theta = 1$ el valor de la amplitud es $|\rho_k| = 0$, entonces el retrato de amplitud Ret_amp_Ft06PrNe no es necesario realizar la gráfica.

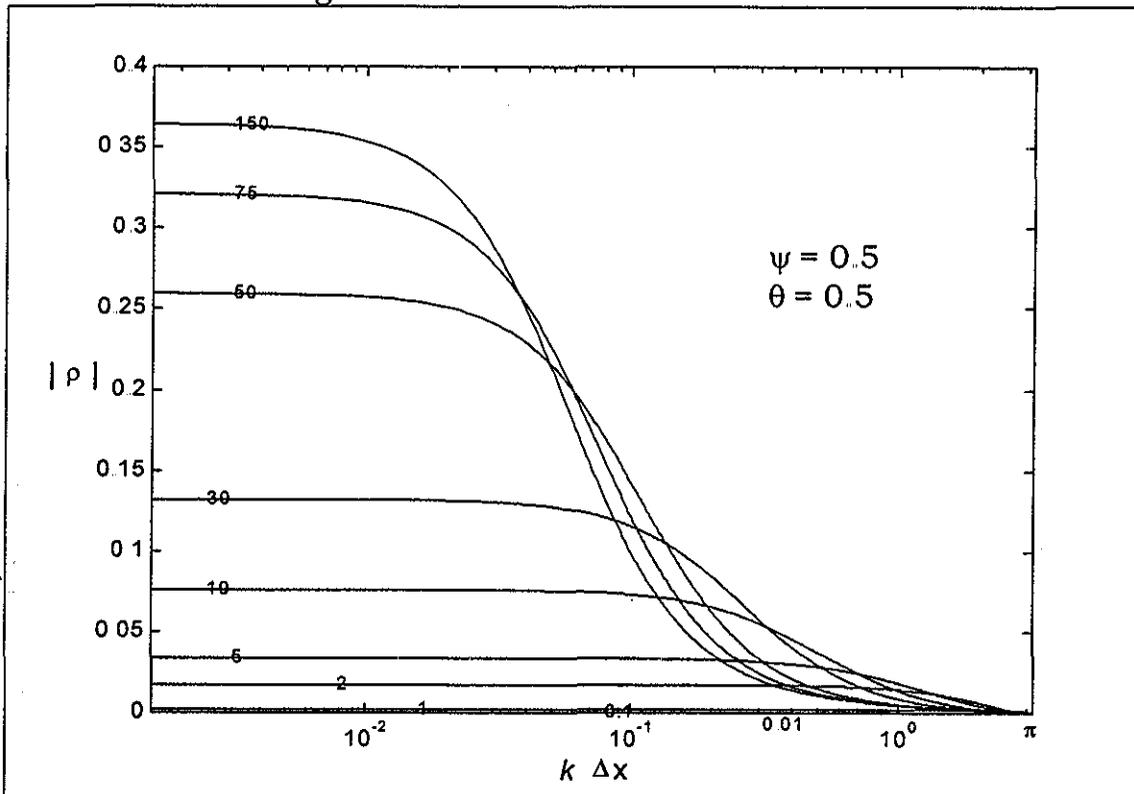


Lámina 5.47. Caso Ret_amp_Fs01PrNe.

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

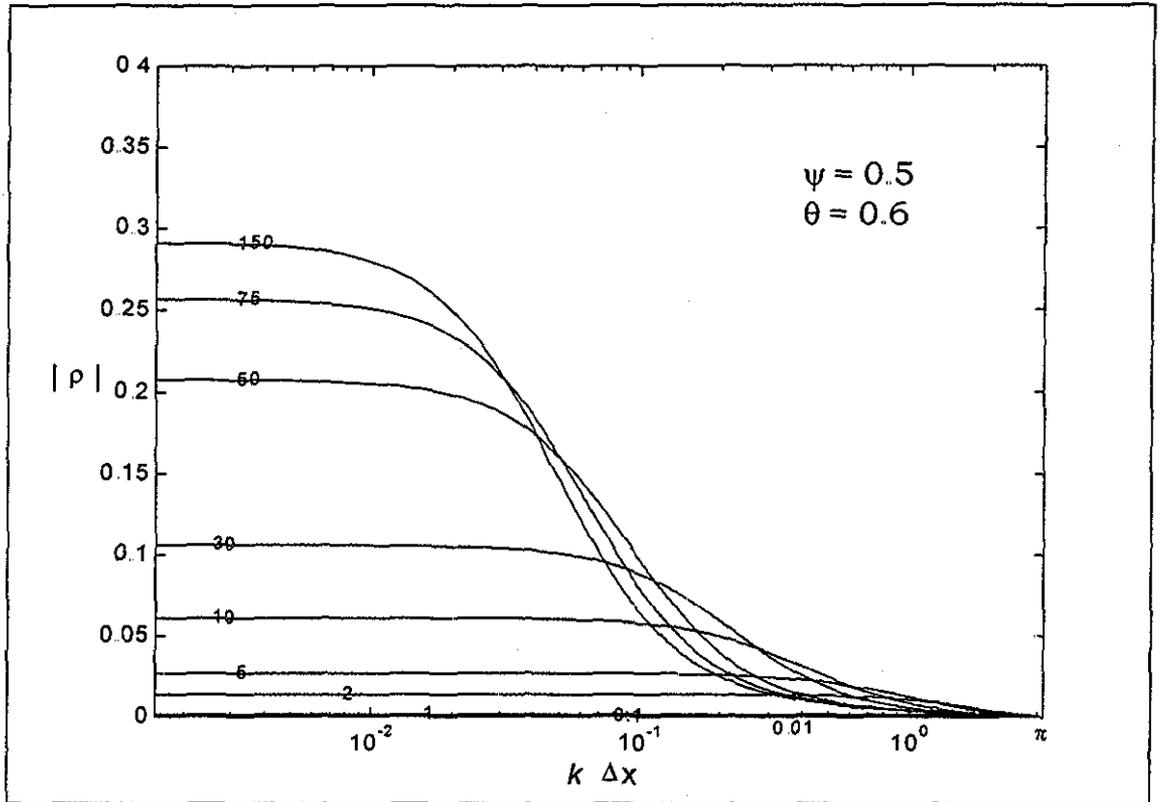


Lámina 5.48. Caso Ret_amp_Fs02PrNe.

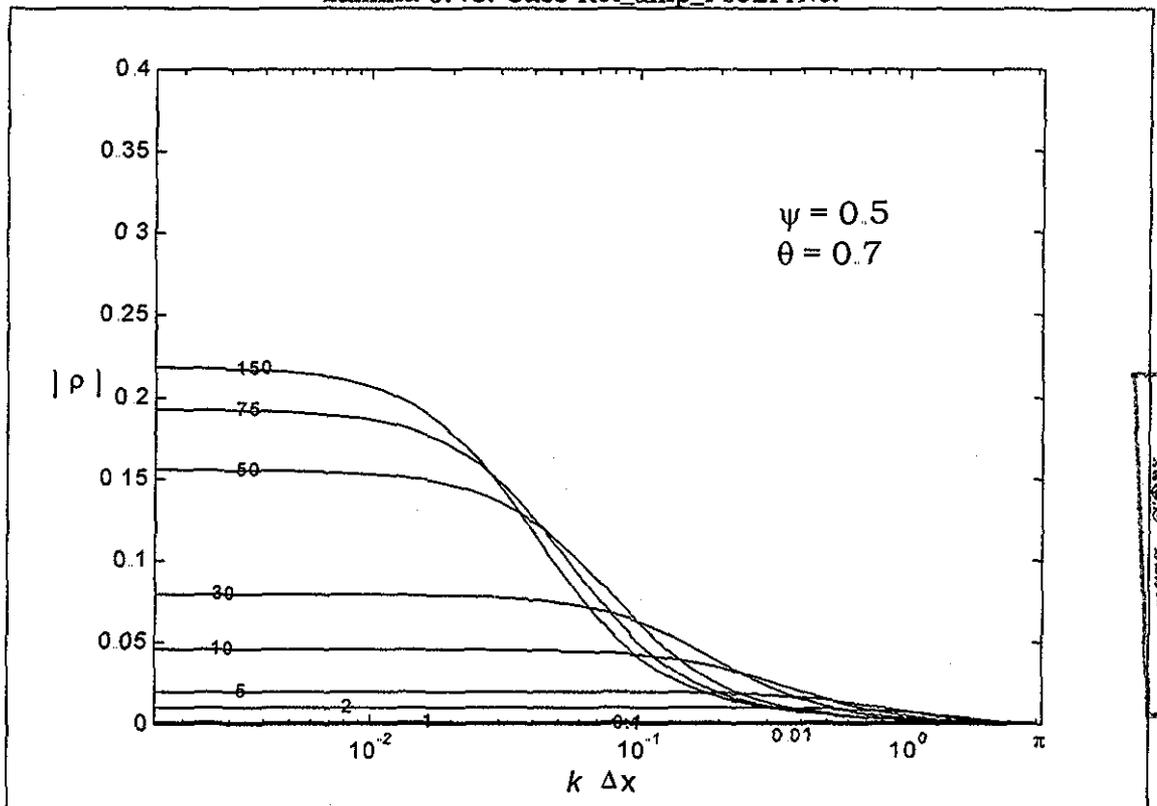


Lámina 5.49. Caso Ret_amp_Fs03PrNe.

UNIVERSIDAD DE CHILE
BIBLIOTECA
SERIE CON

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

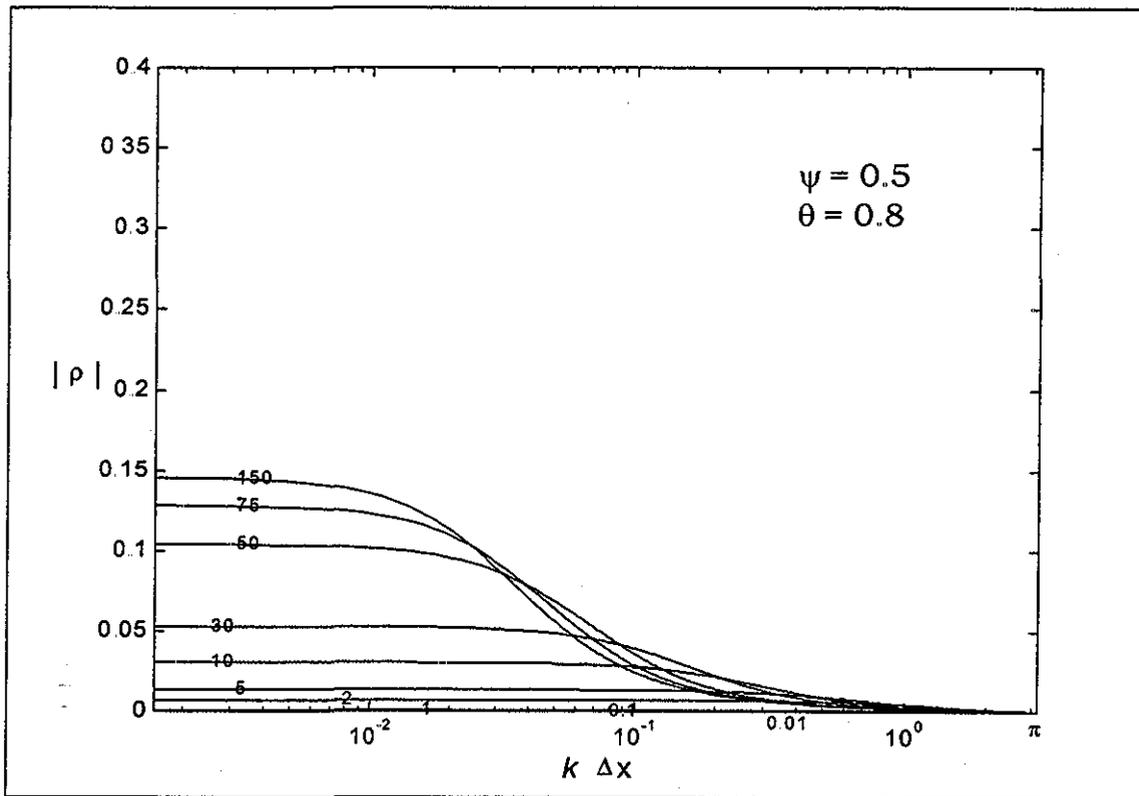


Lámina 5.50. Caso Ret_amp_Fs04PrNe.

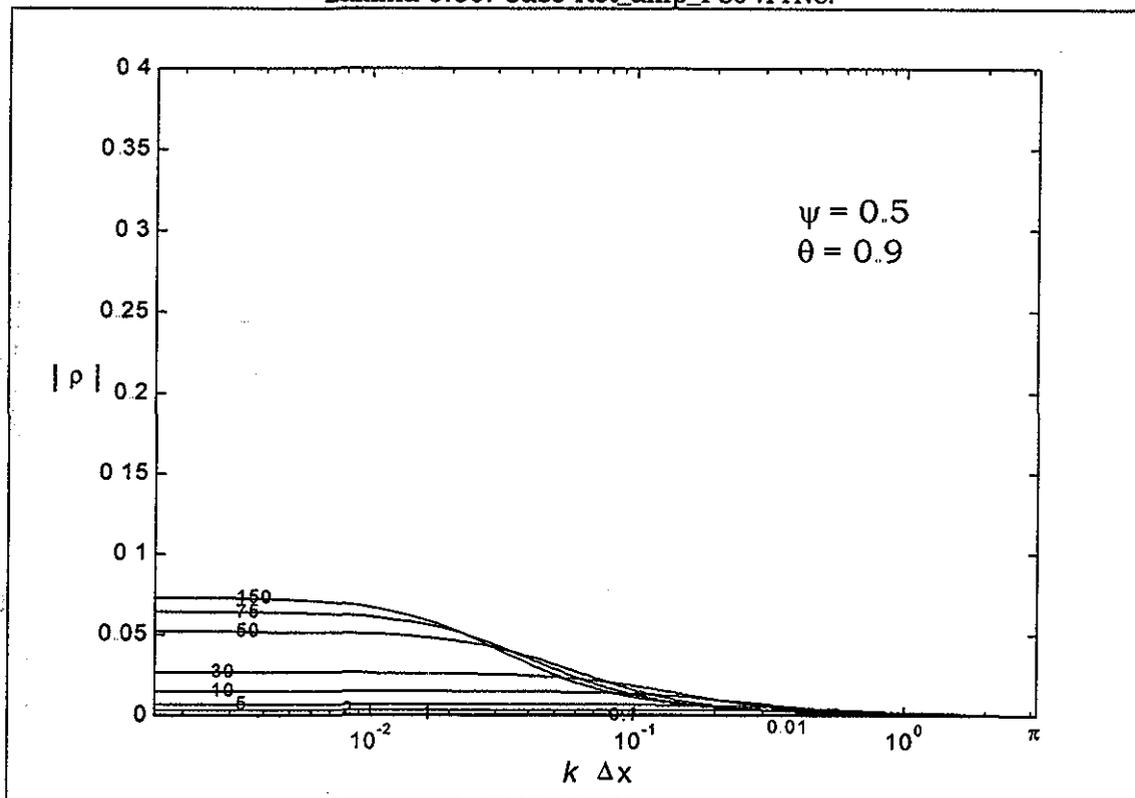


Lámina 5.51. Caso Ret_amp_Fs05PrNe.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

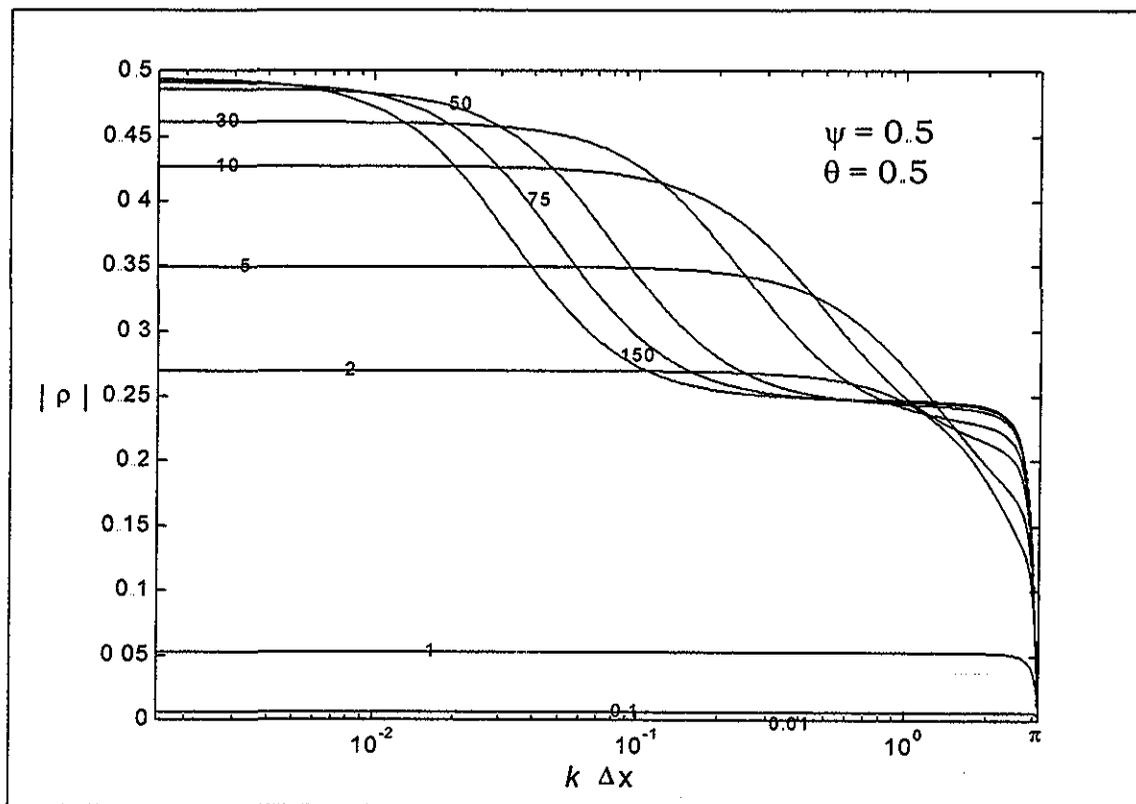


Lámina 5.52. Caso Ret_amp_Ft01PrNe.

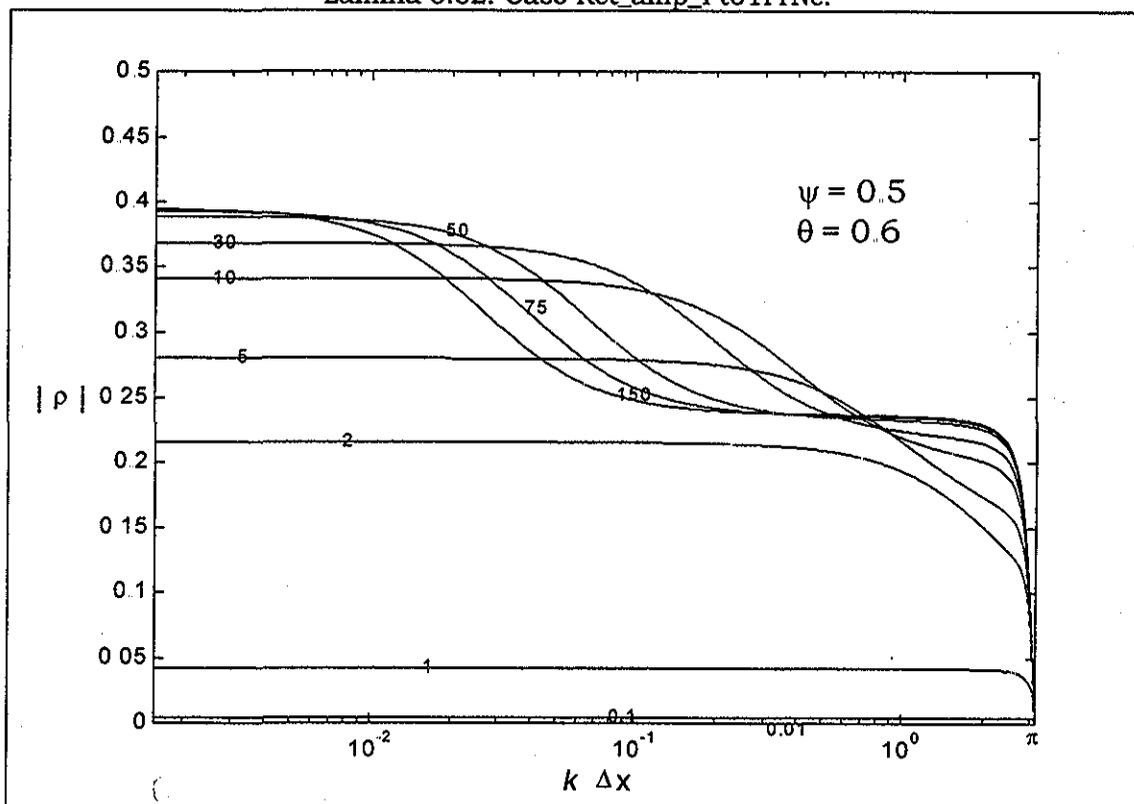


Lámina 5.53. Caso Ret_amp_Ft02PrNe.

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

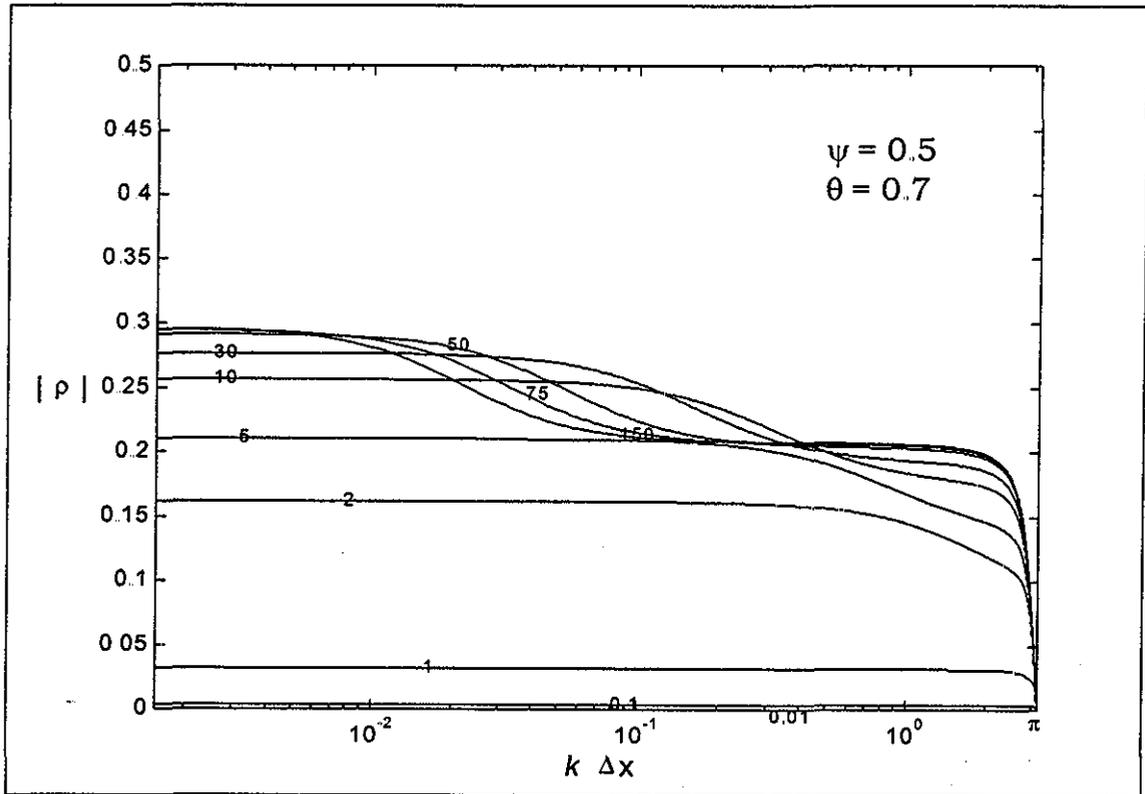


Lámina 5.54. Caso Ret_amp_Ft03PrNe.

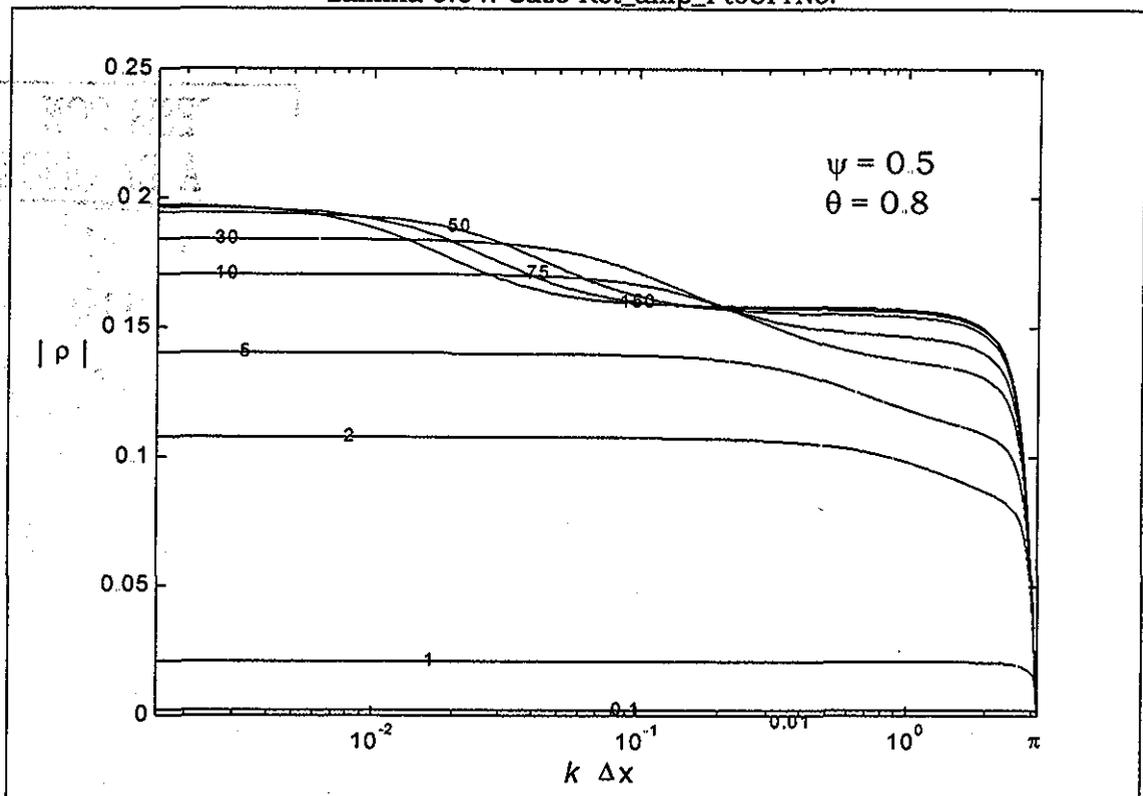


Lámina 5.55. Caso Ret_amp_Ft04PrNe.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

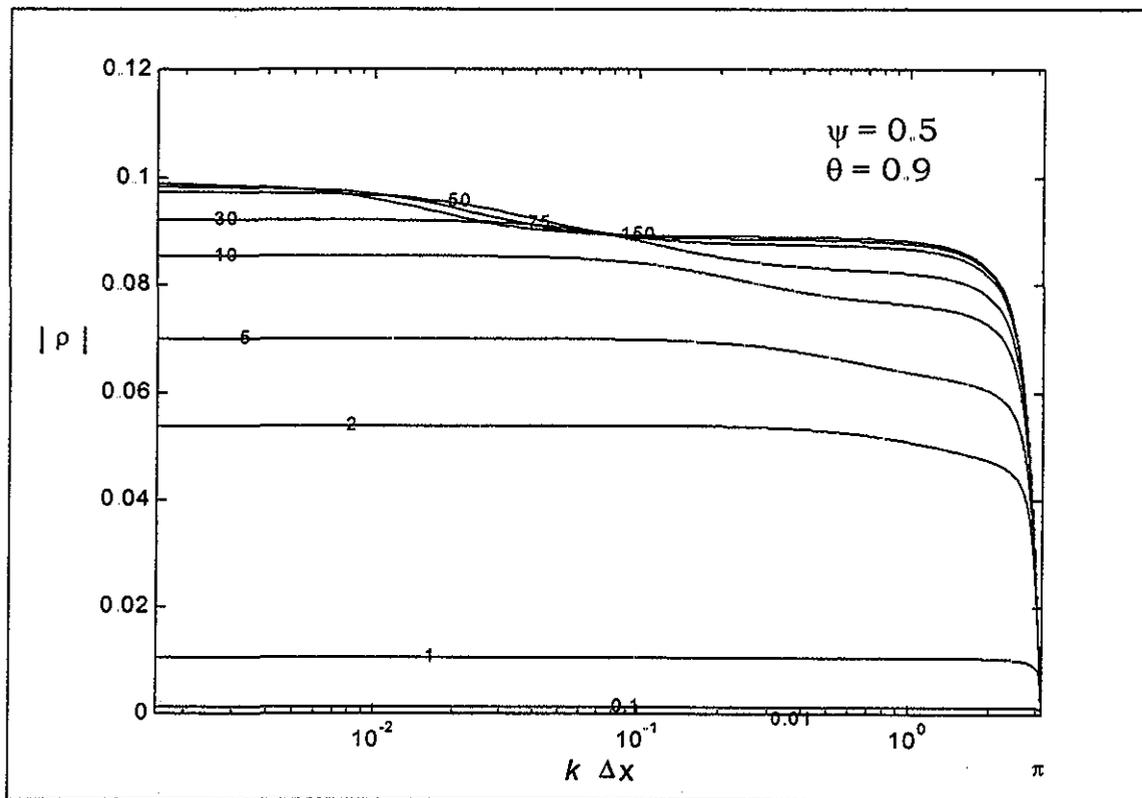


Lámina 5.56. Caso Ret_amp_Ft05PrNe.

5.8. Pruebas numéricas

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

5.8.1. Programación del esquema con la metodología de Picard

En este apartado se construirá el algoritmo que permita generar el código de programación del esquema en diferencias finitas de Preissmann, aplicado a las ecuaciones de Saint-Venant en su versión conservativa diferencial (ecuaciones 2.3.52) y (2.3.53). Aunque en el apartado (5.1) se presentó este esquema de discretización, la forma que allí presenta el término convectivo de la ecuación de cantidad de movimiento (5.1.5) no permite programar un algoritmo adecuado para la actualización no lineal (ya sea por el método de Picard o por el de Newton-Raphson). En vista de lo anterior, se propone manejar el término convectivo de la ecuación de cantidad de movimiento y la evaluación del término que contiene el nivel de la superficie libre del agua, como se presentó en el subcapítulo (5.6), ecuaciones (5.6.1 y 5.6.2).

Así, sustituyendo los operadores (5.1.1)-(5.1.3) en (2.3.52) y (5.6.3), como se muestra a continuación, se tiene:



$$(1-\psi)\frac{A_j^{n+1}-A_j^n}{\Delta t} + \psi\frac{A_{j+1}^{n+1}-A_{j+1}^n}{\Delta t} + (1-\theta)\frac{Q_{j+1}^n-Q_j^n}{\Delta x} + \theta\frac{Q_{j+1}^{n+1}-Q_j^{n+1}}{\Delta x} = 0 \quad (5.8.1)$$

$$\begin{aligned} & \frac{(1-\psi)}{\Delta t}(Q_j^{n+1}-Q_j^n) + \frac{\psi}{\Delta t}(Q_{j+1}^{n+1}-Q_{j+1}^n) + \\ & 2\left\{(1-\theta)\left[(1-\psi)\left(\frac{Q}{A}\right)_j^n + \psi\left(\frac{Q}{A}\right)_{j+1}^n\right] + \theta\left[(1-\psi)\left(\frac{Q}{A}\right)_j^{n+1} + \psi\left(\frac{Q}{A}\right)_{j+1}^{n+1}\right]\right\} \\ & \left[\frac{(1-\theta)}{\Delta x}(Q_{j+1}^n-Q_j^n) + \frac{\theta}{\Delta x}(Q_{j+1}^{n+1}-Q_j^{n+1})\right] + \\ & \left\{(1-\theta)\left[(1-\psi)\left(g\frac{A}{B}-\frac{Q^2}{A^2}\right)_j^n + \psi\left(g\frac{A}{B}-\frac{Q^2}{A^2}\right)_{j+1}^n\right] + \right. \\ & \left. \theta\left[(1-\psi)\left(g\frac{A}{B}-\frac{Q^2}{A^2}\right)_j^{n+1} + \psi\left(g\frac{A}{B}-\frac{Q^2}{A^2}\right)_{j+1}^{n+1}\right]\right\} \\ & \left[\frac{(1-\theta)}{\Delta x}(A_{j+1}^n-A_j^n) + \frac{\theta}{\Delta x}(A_{j+1}^{n+1}-A_j^{n+1})\right] + \\ & g\left\{(1-\theta)\left[(1-\psi)(S_f-S_b)_j^n + \psi(S_f-S_b)_{j+1}^n\right] + \theta\left[(1-\psi)(S_f-S_b)_j^{n+1} + \psi(S_f-S_b)_{j+1}^{n+1}\right]\right\} \\ & \left\{(1-\theta)\left[(1-\psi)A_j^n + \psi A_{j+1}^n\right] + \theta\left[(1-\psi)A_j^{n+1} + \psi A_{j+1}^{n+1}\right]\right\} = 0 \end{aligned} \quad (5.8.2)$$

Dado que la ecuación de cantidad de movimiento (5.8.2) es no lineal, para establecer una estrategia de solución iterativa mediante el método de Picard, se propone separar los términos que producen la no linealidad, indicando la iteración en que son resueltos y haciendo uso del subíndice m . De esta forma las ecuaciones (5.8.1) y (5.8.2) se pueden escribir así:

$$\begin{aligned} & (1-\psi)\frac{A_j^{n+1,m+1}-A_j^n}{\Delta t} + \psi\frac{A_{j+1}^{n+1,m+1}-A_{j+1}^n}{\Delta t} + \\ & (1-\theta)\frac{Q_{j+1}^n-Q_j^n}{\Delta x} + \theta\frac{Q_{j+1}^{n+1,m+1}-Q_j^{n+1,m+1}}{\Delta x} = 0 \end{aligned} \quad (5.8.3)$$



$$\begin{aligned}
 & \frac{(1-\psi)}{\Delta t} (Q_j^{n+1,m+1} - Q_j^n) + \frac{\psi}{\Delta t} (Q_{j+1}^{n+1,m+1} - Q_{j+1}^n) + \\
 & \Pi_1 \left[\frac{(1-\theta)}{\Delta x} (Q_{j+1}^n - Q_j^n) + \frac{\theta}{\Delta x} (Q_{j+1}^{n+1,m+1} - Q_j^{n+1,m+1}) \right] + \\
 & \Pi_2 \left[\frac{(1-\theta)}{\Delta x} (A_{j+1}^n - A_j^n) + \frac{\theta}{\Delta x} (A_{j+1}^{n+1,m+1} - A_j^{n+1,m+1}) \right] + \\
 & \Pi_3 \left\{ (1-\theta) [(1-\psi)A_j^n + \psi A_{j+1}^n] + \theta [(1-\psi)A_j^{n+1,m+1} + \psi A_{j+1}^{n+1,m+1}] \right\} = 0
 \end{aligned} \tag{5.8.4}$$

donde

$$\Pi_1 = 2(1-\theta) \left[(1-\psi) \left(\frac{Q}{A} \right)_j^n + \psi \left(\frac{Q}{A} \right)_{j+1}^n \right] + 2\theta \left[(1-\psi) \left(\frac{Q}{A} \right)_j^{n+1,m} + \psi \left(\frac{Q}{A} \right)_{j+1}^{n+1,m} \right] \tag{5.8.5}$$

$$\begin{aligned}
 \Pi_2 = (1-\theta) & \left[(1-\psi) \left(g \frac{A}{B} - \frac{Q^2}{A^2} \right)_j^n + \psi \left(g \frac{A}{B} - \frac{Q^2}{A^2} \right)_{j+1}^n \right] + \\
 & \theta \left[(1-\psi) \left(g \frac{A}{B} - \frac{Q^2}{A^2} \right)_j^{n+1,m} + \psi \left(g \frac{A}{B} - \frac{Q^2}{A^2} \right)_{j+1}^{n+1,m} \right]
 \end{aligned} \tag{5.8.6}$$

$$\begin{aligned}
 \Pi_3 = g(1-\theta) & \left[(1-\psi) (S_f - S_b)_j^n + \psi (S_f - S_b)_{j+1}^n \right] + \\
 & g\theta \left[(1-\psi) (S_f - S_b)_j^{n+1,m} + \psi (S_f - S_b)_{j+1}^{n+1,m} \right]
 \end{aligned} \tag{5.8.7}$$

Como se puede observar en las ecuaciones (5.8.3) y (5.8.4) éstas tienen términos que sólo están en función de la iteración $m+1$, y los términos Π_1, Π_2 y Π_3 se evalúan en la iteración m .

Entonces, el procedimiento de solución consiste en dar un valor a las variables dependientes para la iteración m y evaluar los términos Π_1, Π_2 y Π_3 . Para la primera iteración se proponen los valores en el instante n , y en los casos subsecuentes el resultado que se tenga para $m+1$, una vez conocidos los términos Π_1, Π_2 y Π_3 . Entonces, el sistema de ecuaciones (5.8.3) y (5.8.4) se convierte en un problema lineal, lo cual permite determinar los valores de la variables dependientes en la iteración $m+1$. Una vez que se tiene el resultado de la iteración $m+1$, se compara con el propuesto en la iteración m y, si la diferencia o error de convergencia es menor a una tolerancia preestablecida entonces se tiene una solución convergente para un error dado, y en este momento se está en posibilidades de determinar la solución para el siguiente intervalo Δt . La forma de evaluar el error en la convergencia no lineal es



$$\left\| \underline{A}^{n+1,m+1} \right\|_{\infty} - \left\| \underline{A}^{n+1,m} \right\|_{\infty} \leq \varepsilon \quad (5.8.8)$$

$$\left\| \underline{Q}^{n+1,m+1} \right\|_{\infty} - \left\| \underline{Q}^{n+1,m} \right\|_{\infty} \leq \varepsilon \quad (5.8.9)$$

donde $\underline{A}^{n+1,m}$ y $\underline{Q}^{n+1,m}$ es el vector de valores de área y gasto respectivamente en el dominio de solución, y ε es una tolerancia arbitraria preestablecida.

Otra forma de manejar el sistema de ecuaciones (5.8.3) y (5.8.4), que facilita la programación, es ordenar ambas ecuaciones en función de las variables para el instante $n + 1$ y la iteración $m + 1$, como ahora se muestra a continuación:

$$a_1 Q_j^{n+1,m+1} + b_1 A_j^{n+1,m+1} + c_1 Q_{j+1}^{n+1,m+1} + d_1 A_{j+1}^{n+1,m+1} = E_1 \quad (5.8.10)$$

$$a_2 Q_j^{n+1,m+1} + b_2 A_j^{n+1,m+1} + c_2 Q_{j+1}^{n+1,m+1} + d_2 A_{j+1}^{n+1,m+1} = E_2 \quad (5.8.11)$$

donde los coeficientes a_1 , b_1 , c_1 , d_1 , a_2 , b_2 , c_2 , d_2 , a_1 , b_1 , c_1 , E_1 y E_2 son constantes para la iteración m , y se evalúan como

$$a_1 = -\frac{\theta}{\Delta x} \quad (5.8.12)$$

$$b_1 = \frac{(1-\psi)}{\Delta t} \quad (5.8.13)$$

$$c_1 = \frac{\theta}{\Delta x} = -a_1 \quad (5.8.14)$$

$$d_1 = \frac{\psi}{\Delta t} \quad (5.8.15)$$

$$E_1 = d_1 A_{j+1}^n + b_1 A_j^n - \frac{(1-\theta)}{\Delta x} (Q_{j+1}^n - Q_j^n) \quad (5.8.16)$$

$$a_2 = b_1 + a_1 \Pi_1 \quad (5.8.17)$$

$$b_2 = a_1 \Pi_2 + \theta(1-\psi)\Pi_3 \quad (5.8.18)$$

$$c_2 = d_1 - a_1 \Pi_1 \quad (5.8.19)$$

$$d_2 = -a_1 \Pi_2 + \theta\psi\Pi_3 \quad (5.8.20)$$

$$E_2 = d_1 Q_{j+1}^n + b_1 Q_j^n - \frac{(1-\theta)}{\Delta x} [(Q_{j+1}^n - Q_j^n)\Pi_1 + (A_{j+1}^n - A_j^n)\Pi_2] - (1-\theta)[(1-\psi)A_j^n + \psi A_{j+1}^n]\Pi_3 \quad (5.8.21)$$

El sistema de ecuaciones (5.8.10) y (5.8.11) es aplicable para cualquier punto dentro del dominio de solución $\Omega(x_j, t_n)$, y para incorporar las condiciones de frontera deben analizarse los casos siguientes:



5.8.2 Programación del esquema con la metodología de Newton-Raphson

El sistema de ecuaciones (5.8.10) y (5.8.11) está basado en la forma de solución aplicando la metodología de solución iterativa de Picard, cuyo estudio de convergencia se hizo en el subcapítulo (5.6). En el caso del esquema numérico con base en la metodología de Newton-Raphson, como se plantea en el subcapítulo (5.7), se puede hacer uso de la ecuación de cantidad de movimiento expandida en serie de Fréchet-Taylor (5.7.10), aplicando un procedimiento similar de discretización para programar el método de Picard. Entonces, la ecuación de discretización de cantidad de movimiento se puede escribir como:

$$\begin{aligned}
 & \frac{(1-\psi)}{\Delta t} (Q_j^{n+1,m+1} - Q_j^n) + \frac{\psi}{\Delta t} (Q_{j+1}^{n+1,m+1} - Q_{j+1}^n) \\
 & + \Pi_1 \left[\frac{(1-\theta)}{\Delta x} (Q_{j+1}^n - Q_j^n) + \frac{\theta}{\Delta x} (Q_{j+1}^{n+1,m+1} - Q_j^{n+1,m+1}) \right] \\
 & + \Pi_2 \left[\frac{(1-\theta)}{\Delta x} (A_{j+1}^n - A_j^n) + \frac{\theta}{\Delta x} (A_{j+1}^{n+1,m+1} - A_j^{n+1,m+1}) \right] \\
 & + \Pi_3 \left\{ (1-\theta) [(1-\psi)A_j^n + \psi A_{j+1}^n] + \theta [(1-\psi)A_j^{n+1,m+1} + \psi A_{j+1}^{n+1,m+1}] \right\} \\
 & + \Pi_4 \left\{ (1-\psi)(A_j^{n+1,m+1} - A_j^{n+1,m}) + \psi(A_{j+1}^{n+1,m+1} - A_{j+1}^{n+1,m}) \right\} \\
 & + \Pi_5 \left\{ (1-\psi)(Q_j^{n+1,m+1} - Q_j^{n+1,m}) + \psi(Q_{j+1}^{n+1,m+1} - Q_{j+1}^{n+1,m}) \right\} = 0
 \end{aligned} \tag{5.8.25}$$

donde los términos no lineales Π_1, Π_2 y Π_3 son definidos por (5.8.5)-(5.8.7) respectivamente, y los términos que involucran la condición de iteración no lineal de Newton-Raphson Π_4 y Π_5 se evalúan por medio de las siguientes ecuaciones:



$$\begin{aligned}
 \Pi_4 = & -2 \left\{ (1-\theta) \left[(1-\psi) \left(\frac{Q}{A^2} \right)_j^n + \psi \left(\frac{Q}{A^2} \right)_{j+1}^n \right] + \theta \left[(1-\psi) \left(\frac{Q}{A^2} \right)_j^{n+1,m} + \psi \left(\frac{Q}{A^2} \right)_{j+1}^{n+1,m} \right] \right\} \\
 & \left[\frac{(1-\theta)}{\Delta x} (Q_{j+1}^n - Q_j^n) + \frac{\theta}{\Delta x} (Q_{j+1}^{n+1,m} - Q_j^{n+1,m}) \right] + \\
 & 2 \left\{ (1-\theta) \left[(1-\psi) \left(\frac{Q^2}{A^3} \right)_j^n + \psi \left(\frac{Q^2}{A^3} \right)_{j+1}^n \right] + \theta \left[(1-\psi) \left(\frac{Q^2}{A^3} \right)_j^{n+1,m} + \psi \left(\frac{Q^2}{A^3} \right)_{j+1}^{n+1,m} \right] \right\} \\
 & \left[\frac{(1-\theta)}{\Delta x} (A_{j+1}^n - A_j^n) + \frac{\theta}{\Delta x} (A_{j+1}^{n+1,m} - A_j^{n+1,m}) \right] + \tag{5.8.26} \\
 & g \left\{ \frac{(1-\theta)}{\Delta x} \left[\left(\frac{A}{B} \right)_{j+1}^n - \left(\frac{A}{B} \right)_j^n \right] + \frac{\theta}{\Delta x} \left[\left(\frac{A}{B} \right)_{j+1}^{n+1,m} - \left(\frac{A}{B} \right)_j^{n+1,m} \right] \right\} + \\
 & g(1-\theta) \left[(1-\psi) (S_f - S_b)_j^n + \psi (S_f - S_b)_{j+1}^n \right] + \\
 & g\theta \left[(1-\psi) (S_f - S_b)_j^{n+1,m} + \psi (S_f - S_b)_{j+1}^{n+1,m} \right] + \\
 & g \left\{ (1-\theta) \left[(1-\psi) A_j^n + \psi A_{j+1}^n \right] + g\theta \left[(1-\psi) A_j^{n+1,m} + \psi A_{j+1}^{n+1,m} \right] \right\} \\
 & \cdot \left\{ (1-\theta) \left[(1-\psi) G_{1j}^n + \psi G_{1j+1}^n \right] + g\theta \left[(1-\psi) G_{1j}^{n+1,m} + \psi G_{1j+1}^{n+1,m} \right] \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Pi_5 = & -2 \left\{ (1-\theta) \left[(1-\psi) \left(\frac{1}{A} \right)_j^n + \psi \left(\frac{1}{A} \right)_{j+1}^n \right] + \theta \left[(1-\psi) \left(\frac{1}{A} \right)_j^{n+1,m} + \psi \left(\frac{1}{A} \right)_{j+1}^{n+1,m} \right] \right\} \\
 & \left[\frac{(1-\theta)}{\Delta x} (Q_{j+1}^n - Q_j^n) + \frac{\theta}{\Delta x} (Q_{j+1}^{n+1,m} - Q_j^{n+1,m}) \right] + \\
 & 2 \left\{ (1-\theta) \left[(1-\psi) \left(\frac{Q}{A^2} \right)_j^n + \psi \left(\frac{Q}{A^2} \right)_{j+1}^n \right] + \theta \left[(1-\psi) \left(\frac{Q}{A^2} \right)_j^{n+1,m} + \psi \left(\frac{Q}{A^2} \right)_{j+1}^{n+1,m} \right] \right\} \tag{5.8.27} \\
 & \left[\frac{(1-\theta)}{\Delta x} (A_{j+1}^n - A_j^n) + \frac{\theta}{\Delta x} (A_{j+1}^{n+1,m} - A_j^{n+1,m}) \right] + \\
 & g \left\{ (1-\theta) \left[(1-\psi) A_j^n + \psi A_{j+1}^n \right] + g\theta \left[(1-\psi) A_j^{n+1,m} + \psi A_{j+1}^{n+1,m} \right] \right\} \\
 & \left\{ (1-\theta) \left[(1-\psi) G_{2j}^n + \psi G_{2j+1}^n \right] + g\theta \left[(1-\psi) G_{2j}^{n+1,m} + \psi G_{2j+1}^{n+1,m} \right] \right\}
 \end{aligned}$$

donde los términos G_1 y G_2 para una sección prismática cualquiera son

$$G_1 = -2\alpha \left(\frac{K_s}{R} \right)^{1/3} \frac{|Q|Q}{gRA^2} \left(\frac{5}{3A} - \frac{4\sqrt{ak^2 + 1}}{PB} \right) \tag{5.8.28}$$

y



$$G_2 = 2\alpha \left(\frac{K_s}{R} \right)^{1/3} \frac{|Q|}{gRA^2} \quad (5.8.29)$$

donde ak es el talud del canal

El sistema de ecuaciones (5.8.3) y (5.8.25) también se puede escribir de una forma similar a (5.8.10) y (5.8.11), solamente que deben actualizarse los coeficientes a_2 , b_2 , c_2 , d_2 y E_2 de manera que

$$a_2 = b_1 + a_1 \Pi_1 + (1 - \psi) \Pi_5 \quad (5.8.30)$$

$$b_2 = a_1 \Pi_2 + \theta(1 - \psi) \Pi_3 + (1 - \psi) \Pi_4 \quad (5.8.31)$$

$$c_2 = d_1 - a_1 \Pi_1 + \psi \Pi_5 \quad (5.8.32)$$

$$d_2 = -a_1 \Pi_2 + \theta \psi \Pi_3 + \psi \Pi_4 \quad (5.8.33)$$

$$E_2 = d_1 Q_{j+1}^n + b_1 Q_j^n - \frac{(1 - \theta)}{\Delta x} \left[(Q_{j+1}^n - Q_j^n) \Pi_1 + (A_{j+1}^n - A_j^n) \Pi_2 \right] \\ - (1 - \theta) \left[(1 - \psi) A_j^n + \psi A_{j+1}^n \right] \Pi_3 + \left[(1 - \psi) A_j^{n+1,m} + \psi A_{j+1}^{n+1,m} \right] \Pi_4 \\ + \left[(1 - \psi) Q_j^{n+1,m} + \psi Q_{j+1}^{n+1,m} \right] \Pi_5 \quad (5.8.34)$$

El procedimiento de solución y evaluación de las condiciones de frontera no cambia con respecto a la metodología de Picard, y las diferencias numéricas de aplicar ambos métodos de solución a una condición de flujo se muestran en el apartado (5.8.3), por medio de pruebas numéricas.

5.8.3 Verificación numérica

Las pruebas numéricas del esquema de Preissmann aplicado a las ecuaciones de Saint-Venant se realizaron para diferentes condiciones de flujo, por una parte para verificar la condición de estabilidad $|V_e| \leq 1$ (ecuación 5.4.28) y, además, se hizo una serie de pruebas numéricas para comprobar el comportamiento del esquema de Preissmann en la convergencia de las iteraciones no lineales (método de Picard y método de Newton-Raphson).

a) Verificación de la condición de estabilidad.

Para llevar a cabo la verificación de la condición de estabilidad del esquema para $|V_e| \leq 1$, se programó el esquema en diferencias finitas para la condición de flujo supercrítico (5.8.10) y (5.8.11), en un ambiente programación por objetos MatLab[®] v.5.0 (MatWorks, 1997). Éste permite una manipulación matricial optimizada y, en el caso de presentarse un problema de inestabilidad, determinar su comportamiento de una manera versátil.



La prueba de inestabilidad se llevó a cabo sobre un canal de longitud $L = 1000\text{ m}$, gasto $Q = 1\text{ m}^3/\text{s}$ y rugosidad de Manning $n = 0.025$ en una sección transversal rectangular, con un ancho de la base del canal $b = 1.0\text{ m}$, discretización espacial $\Delta x = 1.0\text{ m}$, factor de peso espacial $\psi = 0.50$ y factor de peso temporal $\theta = 0.60$. En el valor de los intervalos temporales se utilizó un número de Courant $C_r = 1.0$, precisión numérica $1e^{-16}$, tolerancia sobre las iteraciones no lineales $Tol = 1 \times 10^{-14}$ y, para determinar la condición crítica de estabilidad numérica, una variación de la pendiente del fondo del cauce dentro del rango $0.08 \leq S_b \leq 0.1$. El resultado que se obtuvo de esta prueba numérica fue que la condición de inestabilidad se empieza a generar para valores $|V_e|$ ligeramente mayores que 1, lo cual concuerda con lo demostrado en forma analítica en el subcapítulo 5.4.

Como un resultado colateral a estas pruebas numéricas, se observó que en el caso de reducirse los intervalos computacionales a un valor menor, como en el caso de considerar $\Delta x = 100.0\text{ m}$, la condición de estabilidad se presenta para valores del número de Vedernikov $|V_e| > 5.0$. Esto es debido a que la condición de frontera aguas arriba y el número de intervalos computacionales (diez en este caso) inhiben la formación o propagación dentro del dominio de la inestabilidad numérica.

b) Verificación de la condición de estabilidad general y convergencia sobre las iteraciones no lineales.

Las pruebas numéricas para determinar el comportamiento del esquema de Preissmann aplicado a las ecuaciones de Saint-Venant, se realizó para diferentes condiciones de flujo (subcrítico y supercrítico) y, además, aplicando diferentes metodologías para evaluar la convergencia numérica sobre los términos no lineales (método de Picard o método de Newton-Raphson), estas pruebas simulan el comportamiento del tránsito de un avenida provocado por el ingreso de un hidrograma triangular sobre un cauce natural.

Para identificar las pruebas numéricas para los esquemas de Preissmann (capítulo 5), de Leendertse (capítulo 6) y de elemento finito GWCE (capítulo 7), se propone el manejo de una clave de identificación que se construye conforme a las siguientes consideraciones:

[Clave] = { Régimen [Fs, Ft] } #prueba { Esquema [Pr (Pi, Ne), Le, Gw] }

donde:

Clave: Clave de identificación de la prueba numérica de una condición de flujo de simulación.



Régimen : Tipo de régimen que se ha definido en la condición de simulación y los parámetros de identificación pueden ser: Fs, Flujo supercrítico , Ft flujo supercrítico.

#prueba: número de prueba de identificación consecutivo por esquema numérico.

Esquema: Tipo de esquema numérico que se utiliza para resolver las ecuaciones de Saint-Venant. Son las siguientes: Pr, esquema de Preissmann; Le, esquema de direcciones alternantes o de Leendertse, y Gw, formulación basada en elemento finito que resuelve la formulación generalizada de onda (GWCE) aplicada a las ecuaciones de Saint-Venant.

Iteración: forma de solución sobre las iteraciones no lineales, que sólo se aplica a las pruebas sobre el esquema de Preissmann y la forma de solución. Son los siguientes: Pi, solución por medio del método de Picard, y Ne, solución por medio del método de Newton-Raphson.

Cabe señalar que esta clave de identificación también se aplicó a la forma de clasificación de los retratos de fase y amplitud anteponiendo

{ [Ret_amp_,Ret_fas_] }+ [Clave]

donde:

Clave : Clave de identificación de la prueba numérica

Ret_amp_: Retrato de amplitud

Ret_fas_: Retrato de fase.

A manera de ejemplo para la primera prueba del esquema de Preissmann para flujo subcrítico, haciendo uso del método iterativo de Picard, se tiene que la clave de la prueba numérica es Fs01PrPi y los retratos de amplitud y fase de la relación de dispersión (5.4.17) Ret_amp_Fs01Pr (Lámina 5.2) y Ret_fas_Fs01Pr (Lámina 5.32) respectivamente, así como los retratos de amplitud para la metodología iterativa de Picard y Newton-Raphson Ret_amp_Fs01PrPi (lámina 5.44) y Ret_amp_Fs01PrNe (lámina 5.56) respectivamente.

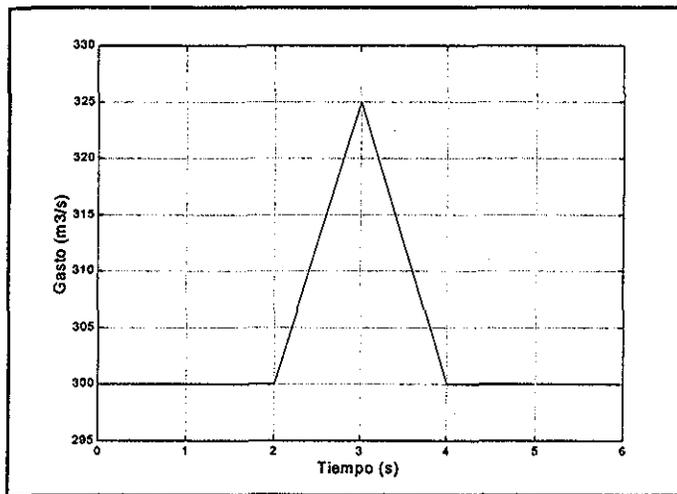
Entonces, el uso de esta clave permite un manejo versátil de los resultados que se obtienen de las pruebas numéricas y de la liga que pueden tener con respecto a su retrato de fase y amplitud, ya que las condiciones de flujo son las mismas.



Una vez definida la clave de identificación de la prueba numérica, se presentan a continuación las condiciones de flujo para cada prueba numérica, tanto para flujo subcrítico como, flujo supercrítico

b.1) Pruebas para flujo subcrítico ($F_s\{\#\}Pr$):

La condición inicial de simulación para flujo subcrítico se definen en la tabla 5.1, con un factor de peso espacial $\psi=0.5$ y la condición de frontera es un hidrograma triangular, como se puede observar en la lámina 5.66.



TESIS CON FALLA DE ORIGEN

Lámina 5.57. Condición de frontera izquierda para el gasto, hidrograma triangular.

b.1.1) Metodología iterativa de Picard ($F_s\{\#\}PrPi$).

Los escenarios de pruebas del esquema de Preissmann con la condición inicial definida en la tabla 5.1, la condición de frontera izquierda para el gasto (lámina 5.66) y la condición de frontera para el nivel constante aguas abajo se realizaron con la siguiente mecánica: dejar la simulación sin modificar la condición de frontera aguas arriba durante 24 hr y verificar la condición de estabilidad.

Después, realizar de nuevo la simulación con la modificación de la frontera aguas arriba, introduciendo el hidrograma triangular y verificando la condición de convergencia sobre los términos no lineales.

Entonces tomando en cuenta lo anterior, se presentan a continuación los resultados de los escenarios de simulación de las pruebas numéricas, en las que se delimitaron las condiciones de estabilidad y convergencia numérica (tablas 5.12-5.17).



Prueba Fs01PrPi, con un valor del factor de peso temporal $\theta = 0.50$.

Número de Courant C_r	Tolerancia	Condición de estabilidad o convergencia			
		Estabilidad		Convergencia	
		Teórica	Observada	Teórica	Observada
0.001	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
0.01	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
0.1	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
1	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
2	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
5	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
10	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
30	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
50	1×10^{-4}	Sí	Sí	Sí	Sí
75	1×10^{-4}	Sí	Sí	No	No
150	1×10^{-4}	Sí	Sí	No	No

Tabla 5.12. Resultado de estabilidad y convergencia de la prueba Fs01PrPi.

Prueba Fs02PrPi, con un valor del factor de peso temporal $\theta = 0.60$.

Número de Courant C_r	Tolerancia	Condición de estabilidad o convergencia			
		Estabilidad		Convergencia	
		Teórica	Observada	Teórica	Observada
0.001	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
0.01	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
0.1	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
1	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
2	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
5	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
10	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
30	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
50	1×10^{-7}	Sí	Sí	No	No
75	1×10^{-7}	Sí	Sí	No	No
150	1×10^{-7}	Sí	Sí	No	No

Tabla 5.13. Resultado de estabilidad y convergencia de la prueba Fs02PrPi.



Prueba Fs03PrPi, con un valor del factor de peso temporal $\theta = 0.70$.

Número de Courant C_r	Tolerancia	Condición de estabilidad o convergencia			
		Estabilidad		Convergencia	
		Teórica	Observada	Teórica	Observada
0.001	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
0.01	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
0.1	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
1	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
2	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
5	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
10	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
30	1×10^{-7}	Sí	Sí	Sí	Sí
50	1×10^{-7}	Sí	Sí	No	No
75	1×10^{-7}	Sí	Sí	No	No
150	1×10^{-7}	Sí	Sí	No	No

Tabla 5.14. Resultado de estabilidad y convergencia de la prueba Fs03PrPi.

Prueba Fs04PrPi, con un valor del factor de peso temporal $\theta = 0.80$.

Número de Courant C_r	Tolerancia	Condición de estabilidad o convergencia			
		Estabilidad		Convergencia	
		Teórica	Observada	Teórica	Observada
0.001	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
0.01	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
0.1	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
1	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
2	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
5	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
10	1×10^{-11}	Sí	Sí	Sí	Sí
30	1×10^{-4}	Sí	Sí	Sí	Sí
50	1×10^{-4}	Sí	Sí	No	No
75	1×10^{-4}	Sí	Sí	No	No
150	1×10^{-4}	Sí	Sí	No	No

Tabla 5.15. Resultado de estabilidad y convergencia de la prueba Fs04PrPi.



Prueba Fs05PrPi, con un valor del factor de peso temporal $\theta = 0.90$.

Número de Courant C_r	Tolerancia	Condición de estabilidad o convergencia			
		Estabilidad		Convergencia	
		Teórica	Observada	Teórica	Observada
0.001	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
0.01	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
0.1	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
1	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
2	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
5	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
10	1×10^{-11}	Sí	Sí	Sí	Sí
30	1×10^{-3}	Sí	Sí	Sí	Sí
50	1×10^{-3}	Sí	Sí	No	No
75	1×10^{-3}	Sí	Sí	No	No
150	1×10^{-3}	Sí	Sí	No	No

Tabla 5.16. Resultado de estabilidad y convergencia de la prueba Fs05PrPi.

Prueba Fs06PrPi, con un valor del factor de peso temporal $\theta = 1.00$.

Número de Courant C_r	Tolerancia	Condición de estabilidad o convergencia			
		Estabilidad		Convergencia	
		Teórica	Observada	Teórica	Observada
0.001	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
0.01	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
0.1	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
1	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
2	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
5	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
10	1×10^{-11}	Sí	Sí	Sí	Sí
30	1×10^{-3}	Sí	Sí	No	No
50	1×10^{-3}	Sí	Sí	No	No
75	1×10^{-3}	Sí	Sí	No	No
150	1×10^{-3}	Sí	Sí	No	No

Tabla 5.17. Resultado de estabilidad y convergencia de la prueba Fs06PrPi.



b.1.2) Metodología iterativa de Newton-Raphson (Fs(#)PrNe).

Los resultados de las pruebas para la solución de los términos no lineales de Newton-Raphson se pueden observar en las tablas 5.18-5.23.

Prueba Fs01PrNe, con un valor del factor de peso temporal $\theta = 0.50$.

Número de Courant C_r	Tolerancia	Condición de estabilidad o convergencia			
		Estabilidad		Convergencia	
		Teórica	Observada	Teórica	Observada
0.001	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
0.01	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
0.1	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
1	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
2	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
5	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
10	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
30	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
50	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
75	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
150	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí

Tabla 5.18. Resultado de estabilidad y convergencia de la prueba Fs01PrNe.

Prueba Fs02PrNe, con un valor del factor de peso temporal $\theta = 0.60$.

Número de Courant C_r	Tolerancia	Condición de estabilidad o convergencia			
		Estabilidad		Convergencia	
		Teórica	Observada	Teórica	Observada
0.001	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
0.01	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
0.1	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
1	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
2	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
5	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
10	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
30	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
50	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
75	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
150	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí

Tabla 5.19. Resultado de estabilidad y convergencia de la prueba Fs02PrNe.



Prueba Fs03PrNe, con un valor del factor de peso temporal $\theta = 0.70$.

Número de Courant C_r	Tolerancia	Condición de estabilidad o convergencia			
		Estabilidad		Convergencia	
		Teórica	Observada	Teórica	Observada
0.001	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
0.01	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
0.1	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
1	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
2	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
5	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
10	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
30	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
50	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
75	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
150	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí

Tabla 5.20. Resultado de estabilidad y convergencia de la prueba Fs03PrNe.

Prueba Fs04PrNe, con un valor del factor de peso temporal $\theta = 0.80$.

Número de Courant C_r	Tolerancia	Condición de estabilidad o convergencia			
		Estabilidad		Convergencia	
		Teórica	Observada	Teórica	Observada
0.001	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
0.01	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
0.1	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
1	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
2	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
5	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
10	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
30	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
50	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
75	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
150	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí

Tabla 5.21. Resultado de estabilidad y convergencia de la prueba Fs04PrNe.



Prueba Fs05PrNe, con un valor del factor de peso temporal $\theta = 0.90$.

Número de Courant C_r	Tolerancia	Condición de estabilidad o convergencia			
		Estabilidad		Convergencia	
		Teórica	Observada	Teórica	Observada
0.001	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
0.01	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
0.1	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
1	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
2	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
5	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
10	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
30	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
50	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
75	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
150	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí

Tabla 5.22. Resultado de estabilidad y convergencia de la prueba Fs05PrNe.

Prueba Fs06PrNe, con un valor del factor de peso temporal $\theta = 1.00$.

Número de Courant C_r	Tolerancia	Condición de estabilidad o convergencia			
		Estabilidad		Convergencia	
		Teórica	Observada	Teórica	Observada
0.001	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
0.01	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
0.1	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
1	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
2	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
5	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
10	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
30	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
50	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
75	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
150	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí

Tabla 5.23. Resultado de estabilidad y convergencia de la prueba Fs06PrNe.



b.2) Pruebas para flujo supercrítico (Ft{#}Pr)

La condición inicial de simulación para flujo supercrítico se define en la tabla 5.3, para un factor de peso $\psi=0.5$. La condición de frontera es un hidrograma triangular (lámina 5.66).

b.2.1) Metodología iterativa de Picard (Ft{#}PrPi)

Los escenarios de pruebas del esquema de Preissmann con la condición inicial definida en la tabla 5.3 (para un factor de peso $\psi=0.5$), la condición de frontera izquierda para el gasto (lámina 5.66) y la condición de frontera para nivel tirante normal aguas arriba tiene la misma secuencia que la utilizada para las pruebas subcríticas, y los resultados de los escenarios de simulación de las pruebas numéricas se muestran en las tablas 5.24-5.29.

Prueba Ft01PrPi, con un valor del factor de peso temporal $\theta = 0.50$.

Número de Courant C_r	Tolerancia	Condición de estabilidad o convergencia			
		Estabilidad		Convergencia	
		Teórica	Observada	Teórica	Observada
0.001	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
0.01	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
0.1	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
1	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
2	1×10^{-13}	Sí	Sí	No	No
5	1×10^{-13}	Sí	Sí	No	No
10	1×10^{-13}	Sí	Sí	No	No
30	1×10^{-13}	Sí	Sí	No	No
50	1×10^{-13}	Sí	Sí	No	No
75	1×10^{-13}	Sí	Sí	No	No
150	1×10^{-13}	Sí	Sí	No	No

Tabla 5.24. Resultado de estabilidad y convergencia de la prueba Ft01PrPi.



Prueba Ft02PrPi, con un valor del factor de peso temporal $\theta = 0.60$.

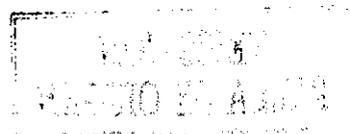
Número de Courant C_r	Tolerancia	Condición de estabilidad o convergencia			
		Estabilidad		Convergencia	
		Teórica	Observada	Teórica	Observada
0.001	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
0.01	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
0.1	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
1	1×10^{-8}	Sí	Sí	Sí	Sí
2	1×10^{-8}	Sí	Sí	No	No
5	1×10^{-8}	Sí	Sí	No	No
10	1×10^{-8}	Sí	Sí	No	No
30	1×10^{-8}	Sí	Sí	No	No
50	1×10^{-8}	Sí	Sí	No	No
75	1×10^{-8}	Sí	Sí	No	No
150	1×10^{-8}	Sí	Sí	No	No

Tabla 5.25. Resultado de estabilidad y convergencia de la prueba Ft02PrPi.

Prueba Ft03PrPi, con un valor del factor de peso temporal $\theta = 0.70$.

Número de Courant C_r	Tolerancia	Condición de estabilidad o convergencia			
		Estabilidad		Convergencia	
		Teórica	Observada	Teórica	Observada
0.001	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
0.01	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
0.1	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
1	1×10^{-7}	Sí	Sí	Sí	Sí
2	1×10^{-7}	Sí	Sí	No	No
5	1×10^{-7}	Sí	Sí	No	No
10	1×10^{-7}	Sí	Sí	No	No
30	1×10^{-7}	Sí	Sí	No	No
50	1×10^{-7}	Sí	Sí	No	No
75	1×10^{-7}	Sí	Sí	No	No
150	1×10^{-7}	Sí	Sí	No	No

Tabla 5.26. Resultado de estabilidad y convergencia de la prueba Ft03PrPi.





Prueba Ft04PrPi, con un valor del factor de peso temporal $\theta = 0.80$.

Número de Courant C_r	Tolerancia	Condición de estabilidad o convergencia			
		Estabilidad		Convergencia	
		Teórica	Observada	Teórica	Observada
0.001	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
0.01	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
0.1	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
1	1×10^{-5}	Sí	Sí	Sí	Sí
2	1×10^{-5}	Sí	Sí	No	No
5	1×10^{-5}	Sí	Sí	No	No
10	1×10^{-5}	Sí	Sí	No	No
30	1×10^{-5}	Sí	Sí	No	No
50	1×10^{-5}	Sí	Sí	No	No
75	1×10^{-5}	Sí	Sí	No	No
150	1×10^{-5}	Sí	Sí	No	No

Tabla 5.27. Resultado de estabilidad y convergencia de la prueba Ft04PrPi.

Prueba Ft05PrPi, con un valor del factor de peso temporal $\theta = 0.90$.

Número de Courant C_r	Tolerancia	Condición de estabilidad o convergencia			
		Estabilidad		Convergencia	
		Teórica	Observada	Teórica	Observada
0.001	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
0.01	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
0.1	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
1	1×10^{-1}	Sí	Sí	Sí	Sí
2	1×10^{-1}	Sí	Sí	No	No
5	1×10^{-1}	Sí	Sí	No	No
10	1×10^{-1}	Sí	Sí	No	No
30	1×10^{-1}	Sí	Sí	No	No
50	1×10^{-1}	Sí	Sí	No	No
75	1×10^{-1}	Sí	Sí	No	No
150	1×10^{-1}	Sí	Sí	No	No

Tabla 5.28. Resultado de estabilidad y convergencia de la prueba Ft05PrPi.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN



Prueba Ft06PrPi, con un valor del factor de peso temporal $\theta = 1.00$.

Número de Courant C_r	Tolerancia	Condición de estabilidad o convergencia			
		Estabilidad		Convergencia	
		Teórica	Observada	Teórica	Observada
0.001	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
0.01	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
0.1	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
1	1×10^{-1}	Sí	Sí	Sí	Sí
2	1×10^{-1}	Sí	Sí	No	No
5	1×10^{-1}	Sí	Sí	No	No
10	1×10^{-1}	Sí	Sí	No	No
30	1×10^{-1}	Sí	Sí	No	No
50	1×10^{-1}	Sí	Sí	No	No
75	1×10^{-1}	Sí	Sí	No	No
150	1×10^{-1}	Sí	Sí	No	No

Tabla 5.29. Resultado de estabilidad y convergencia de la prueba Ft06PrPi.

b.1.2) Metodología iterativa de Newton-Raphson (Ft{#}PrNe).

Los resultados de la pruebas para la solución de los términos no lineales de Newton-Raphson se pueden observar en las tablas 5.30-5.35.

Prueba Ft01PrNe, con un valor del factor de peso temporal $\theta = 0.50$.

Número de Courant C_r	Tolerancia	Condición de estabilidad o convergencia			
		Estabilidad		Convergencia	
		Teórica	Observada	Teórica	Observada
0.001	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
0.01	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
0.1	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
1	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
2	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
5	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
10	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
30	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
50	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
75	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
150	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí

Tabla 5.30. Resultado de estabilidad y convergencia de la prueba Ft01PrNe.





Prueba Ft02PrNe, con un valor del factor de peso temporal $\theta = 0.60$.

Número de Courant C_r	Tolerancia	Condición de estabilidad o convergencia			
		Estabilidad		Convergencia	
		Teórica	Observada	Teórica	Observada
0.001	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
0.01	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
0.1	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
1	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
2	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
5	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
10	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
30	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
50	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
75	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
150	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí

Tabla 5.31. Resultado de estabilidad y convergencia de la prueba Ft02PrNe.

Prueba Ft03PrNe, con un valor del factor de peso temporal $\theta = 0.70$.

Número de Courant C_r	Tolerancia	Condición de estabilidad o convergencia			
		Estabilidad		Convergencia	
		Teórica	Observada	Teórica	Observada
0.001	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
0.01	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
0.1	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
1	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
2	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
5	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
10	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
30	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
50	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
75	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
150	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí

Tabla 5.32. Resultado de estabilidad y convergencia de la prueba Ft03PrNe.



Prueba Ft04PrNe, con un valor del factor de peso temporal $\theta = 0.80$.

Número de Courant C_r	Tolerancia	Condición de estabilidad o convergencia			
		Estabilidad		Convergencia	
		Teórica	Observada	Teórica	Observada
0.001	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
0.01	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
0.1	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
1	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
2	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
5	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
10	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
30	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
50	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
75	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
150	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí

Tabla 5.33. Resultado de estabilidad y convergencia de la prueba Ft04PrNe.

Prueba Ft05PrNe, con un valor del factor de peso temporal $\theta = 0.90$.

Número de Courant C_r	Tolerancia	Condición de estabilidad o convergencia			
		Estabilidad		Convergencia	
		Teórica	Observada	Teórica	Observada
0.001	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
0.01	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
0.1	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
1	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
2	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
5	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
10	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
30	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
50	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
75	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
150	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí

Tabla 5.34. Resultado de estabilidad y convergencia de la prueba Ft05PrNe.



Prueba Ft06PrNe, con un valor del factor de peso temporal $\theta = 1.00$.

Número de Courant C_r	Tolerancia	Condición de estabilidad o convergencia			
		Estabilidad		Convergencia	
		Teórica	Observada	Teórica	Observada
0.001	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
0.01	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
0.1	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
1	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
2	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
5	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
10	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
30	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
50	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
75	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí
150	1×10^{-13}	Sí	Sí	Sí	Sí

Tabla 5.35. Resultado de estabilidad y convergencia de la prueba Ft06PrNe.



CAPÍTULO 6

ANÁLISIS DEL ESQUEMA DE LEENDERTSE

Continuando con el análisis de esquemas numéricos para el estudio de propagación de perturbaciones, en este caso se analizará un esquema implícito, que tiene la particularidad de calcular las variables dependientes en puntos alternos de la malla. Este tipo de esquemas se conocen como *staggerd grid* o al tresbolillo (Abbott y Basco, 1989). La ventaja principal del uso de un esquema como éste es que permite reescribir la ecuación de conservación de masa dentro de un tiempo equivalente y un espacio centrado, lo que a su vez permite resolver de forma directa un sistema matricial tridiagonal y manejar un menor tiempo de cómputo para tener una solución a un instante de tiempo dado. Mejor aún, en este tipo esquemas no es necesario aplicar una actualización de los términos no lineales, y ello lo convierte en método de paso directo que, por consiguiente, reduce aún más el tiempo de cómputo.

En esencia este tipo de esquemas al tres bolillo parecen ser muy eficaces en lo que respecta al manejo del tiempo de cómputo, en comparación con esquemas más elaborados como puede ser el de Preissmann. Entonces, para comprobar su aplicabilidad para cualquier condición de flujo se propone realizar un análisis de propagación de perturbaciones.



6.1. Análisis de consistencia

Para llevar a cabo el estudio de las condiciones asintóticas u operaciones límite que se obtienen del refinamiento de la malla o de un conjunto de refinamientos en la discretización de las ecuaciones de Saint-Venant, cuando se aplica el esquema de Leendertse, se propone como punto inicial retomar la definición de la ecuaciones de Saint-Venant no conservativas (definición 2.3), donde:

Conservación de masa:

$$\mathcal{L}(\tilde{H}, \tilde{U}; x, t) = B(\tilde{H}; x, t) \frac{\partial \tilde{H}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [\tilde{U} A(\tilde{H}; x, t)] = 0 \quad (2.3.54)$$

Cantidad de movimiento:

$$\mathcal{M}(\tilde{H}, \tilde{U}; x, t) = \frac{\partial \tilde{U}}{\partial t} + \tilde{U} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial x} + g \frac{\partial \tilde{H}}{\partial x} + g \frac{\partial z(x)}{\partial x} + g S_f(\tilde{H}, \tilde{U}; x, t) = 0 \quad (2.3.55)$$

donde x es la coordenada en el sentido horizontal y t el tiempo, como variables independientes; $\tilde{H}(x, t)$ y $\tilde{U}(x, t)$ el tirante y la velocidad respectivamente como variables dependientes, además $(x, y) \in \Omega = [0, L] \times [0, T]$ delimitan el espacio de solución; L , longitud de la conducción; T , tiempo final de solución; g , aceleración de la gravedad; $z_b(x)$ la elevación de la plantilla del canal desde un nivel de referencia; $y(\tilde{H}; x, t)$ el nivel de la superficie libre del agua medido desde un nivel de referencia; $A(\tilde{H}; x, t)$ el área hidráulica y $S_f(\tilde{H}, \tilde{U}; x, t)$ la pendiente de fricción (ecuación 2.3.44).

El sistema de ecuaciones (2.3.54) y (2.3.55) constituye un problema bien planteado de valor inicial y de valores en la frontera; por tanto está sujeto a las condiciones iniciales $\tilde{H}(x, 0) = H_0(x)$ y $\tilde{U}(x, 0) = U_0(x)$; las condiciones de frontera se definen para flujo subcrítico (ecuaciones 2.3.56 y 2.3.57) y flujo supercrítico (ecuaciones 2.3.58 y 2.3.59), respectivamente.

Entonces, para discretizar el sistema (2.3.54) y (2.3.55) en un esquema de diferencias como lo propuso Leendertse en 1966 (Shiao-Kung y Leendertse, 1978; Aldama, *et al.*, 1981; Fischer, 1981; Abbott y Basco, 1989), considerando que se tiene una función $\tilde{F}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ que se aproxima con una variable discreta F_j^n en cada punto (x_j, t_n) del plano Ω , donde a su vez el espacio de solución $\Omega(x_j, t_n)$ es cubierto por una malla de espacio uniforme Δx , para cualquier incremento de tiempo Δt , donde $\Delta x = L/J$, $\Delta t = T/N$ y J, N son dos números enteros que definen los intervalos computacionales de discretización espacial y temporal respectivamente, de forma que se cumple que $\Omega(x_j, t_n) = \Omega(j \Delta x, n \Delta t)$, y



el conjunto de subíndices j se agrupan en el vector \mathbf{J}_Ω . Por tanto, el esquema de diferencias de Leendertse, aplicado a las ecuaciones de Saint-Venant no conservativas (2.3.54) y (2.3.55), se puede escribir de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(H_j^n, U_j^n; x, t) = & B(H_j^n; x_j, t_n) \frac{H_j^{n+1} - H_j^n}{\Delta t} + \\ & \frac{1}{\Delta x} \left[U_{j+1/2}^{n+1} A(H_{j+1/2}^n; x_{j+1}, t_n) - U_{j-1/2}^{n+1} A(H_{j-1/2}^n; x_{j-1}, t_n) \right] = 0 \end{aligned} \quad (6.1.1)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(H_j^n, U_j^n; x, t) = & \frac{U_{j+1/2}^{n+1} - U_{j+1/2}^n}{\Delta t} + U_{j+1/2}^{n+1} \left(\frac{U_{j+3/2}^n - U_{j-1/2}^n}{2\Delta x} \right) + \\ & g \frac{y(H_{j+1}^{n+1}; x_{j+1}, t_n) - y(H_j^{n+1}; x_j, t_n)}{2\Delta x} + \frac{\alpha K_s^{1/3} |U_{j+1/2}^n| |U_{j+1/2}^{n+1}|}{R(H_{j+1/2}^n; x_{j+1/2}, t_n)^{4/3}} = 0 \end{aligned} \quad (6.1.2)$$

Para proceder al análisis de consistencia numérica del esquema de Leendertse aplicado el sistema de ecuaciones no conservativas de Saint-Venant (6.1.1) y (6.1.2), es necesario hacer las siguientes consideraciones, dado que las variables discretas H_j^n, U_j^n , tienen valores sólo en el punto $\Omega(x_j, t_n)$; entonces, para ampliar los requisitos de continuidad, se propone introducir una función polinomial que pase por cada punto de discretización del espacio en donde se tienen valores de las variables discretas de forma que $H(x_j, t_n) = H_j^n$, $U(x_j, t_n) = U_j^n \quad \forall j \in \mathbf{J}_\Omega, n \in (0, N]$. Además, las funciones polinomiales H y U cumplen con los requisitos de continuidad suficientes que permiten el aplicar una expansión en serie de Taylor de grado n .

Entonces, para determinar la consistencia numérica de la ecuación discreta de conservación de masa (6.1.1), se propone realizar las siguientes expansiones en serie de Taylor.

$$B_j^n = B(x_j, t_n) = B(x, t) \quad (6.1.3)$$

$$H_j^n = H(x_j, t_n) = H(x, t) \quad (6.1.4)$$

$$\begin{aligned} H_j^{n+1} &= H(x_j, t_{n+1}) \\ &= H(x, t + \Delta t) \\ &= H + \Delta t \frac{\partial H}{\partial t} \Big|_{(x,t)} + \frac{\Delta t^2}{2!} \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} \Big|_{(x,t)} + O(\Delta t^3) \end{aligned} \quad (6.1.5)$$



$$\begin{aligned}
 U_{j+1/2}^{n+1} &= U(x_{j+1/2}, t_{n+1}) \\
 &= U(x + \Delta x/2, t + \Delta t) \\
 &= U + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial U}{\partial x} \Big|_{(x,t)} + \Delta t \frac{\partial U}{\partial t} \Big|_{(x,t)} + \frac{\Delta x^2}{8} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \Big|_{(x,t)} + \\
 &\quad \frac{\Delta x \Delta t}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial t} \Big|_{(x,t)} + \frac{\Delta t^2}{2!} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \Big|_{(x,t)} + O[(\Delta x + \Delta t)^3]
 \end{aligned} \tag{6.1.6}$$

$$\begin{aligned}
 U_{j-1/2}^{n+1} &= U(x_{j-1/2}, t_{n+1}) \\
 &= U(x - \Delta x/2, t + \Delta t) \\
 &= U - \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial U}{\partial x} \Big|_{(x,t)} + \Delta t \frac{\partial U}{\partial t} \Big|_{(x,t)} + \frac{\Delta x^2}{8} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \Big|_{(x,t)} - \\
 &\quad \frac{\Delta x \Delta t}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial t} \Big|_{(x,t)} + \frac{\Delta t^2}{2!} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \Big|_{(x,t)} + O[(\Delta x + \Delta t)^3]
 \end{aligned} \tag{6.1.7}$$

$$\begin{aligned}
 A_{j+1/2}^n &= A(x_{j+1/2}, t_n) \\
 &= A(x + \Delta x/2, t) \\
 &= A + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial A}{\partial x} \Big|_{(x,t)} + \frac{\Delta x^2}{8} \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} \Big|_{(x,t)} + O(\Delta x^3)
 \end{aligned} \tag{6.1.8}$$

$$\begin{aligned}
 A_{j-1/2}^n &= A(x_{j-1/2}, t_n) \\
 &= A(x - \Delta x/2, t) \\
 &= A - \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial A}{\partial x} \Big|_{(x,t)} + \frac{\Delta x^2}{8} \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} \Big|_{(x,t)} + O(\Delta x^3)
 \end{aligned} \tag{6.1.9}$$

Por tanto, el orden de consistencia numérica de (6.1.1) se determina sustituyendo las series de Taylor (6.1.3)-(6.1.9) de forma que

$$\ell(H,U) = B \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (UA) + \Delta t \left[\frac{1}{2} \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial U}{\partial t} A \right) \right] + O[(\Delta x + \Delta t)^2] = 0 \tag{6.1.10}$$

Por otro lado, para determinar la consistencia numérica de la ecuación discretizada de cantidad de movimiento (6.1.2) es necesario llevar a cabo las siguientes expansiones en serie de Taylor:



$$\begin{aligned}
 U_{j+1/2}^n &= U(x_{j+1/2}, t_n) \\
 &= U(x + \Delta x/2, t) \\
 &= U + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial U}{\partial x} \Big|_{(x,t)} + \frac{\Delta x^2}{8} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \Big|_{(x,t)} + O(\Delta x^3)
 \end{aligned} \tag{6.1.11}$$

$$\begin{aligned}
 U_{j-1/2}^n &= U(x_{j-1/2}, t_n) \\
 &= U(x - \Delta x/2, t) \\
 &= U - \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial U}{\partial x} \Big|_{(x,t)} + \frac{\Delta x^2}{8} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \Big|_{(x,t)} + O(\Delta x^3)
 \end{aligned} \tag{6.1.12}$$

$$\begin{aligned}
 U_{j+3/2}^n &= U(x_{j+3/2}, t_n) \\
 &= U(x + 3\Delta x/2, t) \\
 &= U + \frac{3\Delta x}{2} \frac{\partial U}{\partial x} \Big|_{(x,t)} + \frac{9\Delta x^2}{8} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \Big|_{(x,t)} + O(\Delta x^3)
 \end{aligned} \tag{6.1.13}$$

$$\begin{aligned}
 y_{j+1}^{n+1} &= y(x_{j+1}, t_{n+1}) \\
 &= y(x + \Delta x, t + \Delta t) = \\
 &= y + \Delta x \frac{\partial y}{\partial x} \Big|_{(x,t)} + \Delta t \frac{\partial y}{\partial t} \Big|_{(x,t)} + \frac{\Delta x^2}{2!} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \Big|_{(x,t)} - \\
 &\quad \Delta x \Delta t \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t} \Big|_{(x,t)} + \frac{\Delta t^2}{2!} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \Big|_{(x,t)} + O[(\Delta x + \Delta t)^3]
 \end{aligned} \tag{6.1.14}$$

$$\begin{aligned}
 y_j^{n+1} &= y(x_j, t_{n+1}) \\
 &= y(x, t + \Delta t) \\
 &= y + \Delta t \frac{\partial y}{\partial t} \Big|_{(x,t)} + \frac{\Delta t^2}{2!} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \Big|_{(x,t)} + O(\Delta t^3)
 \end{aligned} \tag{6.1.15}$$

$$\begin{aligned}
 (R_{j+1/2}^n)^{-4/3} &= [R(x_{j+1/2}, t_n)]^{-4/3} \\
 &= [R(x + \Delta x/2, t)]^{-4/3} \\
 &= R^{-4/3} - \frac{2\Delta x}{3} R^{-7/3} \frac{\partial R}{\partial x} \Big|_{(x,t)} + \frac{7\Delta x^2}{18} R^{-10/3} \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} \Big|_{(x,t)} + O(\Delta x^3)
 \end{aligned} \tag{6.1.16}$$

entonces, sustituyendo las expansiones (6.1.6) y (6.1.11)-(6.1.16) en (6.1.2) y agrupando, se tiene:



$$\begin{aligned}
 m(H,U) &= \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + g \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\alpha K_s^{1/3} |U| U}{R^{4/3}} + \\
 \frac{\Delta x}{2} &\left[\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + U \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\alpha K_s^{1/3} |U|}{R^{4/3}} \left(\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{2U}{3R} \frac{\partial R}{\partial x} \right) \right] + \\
 \Delta t &\left[\frac{1}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \frac{\partial U}{\partial t} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t} + \frac{2\alpha K_s^{1/3} |U|}{R^{4/3}} \frac{\partial U}{\partial x} \right] + O[(\Delta x + \Delta t)^2] = 0
 \end{aligned} \tag{6.1.17}$$

Del resultado que se obtiene de la consistencia numérica de las ecuaciones discretizadas (6.1.1) y (6.1.2) se puede construir el siguiente teorema:

Teorema 6.1 *Sea el sistema de ecuaciones de Saint-Venant no conservativas discretizado en un esquema en diferencias finitas bajo la propuesta de Leendertse (6.1.1) y (6.1.2), el cual es consistente numéricamente bajo cualquier norma cuando se tiene un refinamiento de la malla de forma que $\Delta x, \Delta t \rightarrow 0$.*

Demostración: Considerando el sistema de ecuaciones (2.3.54) y (2.3.55) y (6.1.10) y (6.1.17), y generando un refinamiento de la malla de forma que se tiene la siguiente condición asintótica bajo cualquier norma:

$$\left\| \mathcal{L}(\tilde{H}, \tilde{U}) - \mathcal{L}(H, U) \right\| \rightarrow 0 \quad \text{cuando } \Delta x, \Delta t \rightarrow 0 \tag{6.1.18}$$

$$\left\| \mathcal{M}(\tilde{H}, \tilde{U}) - m(H, U) \right\| \rightarrow 0 \quad \text{cuando } \Delta x, \Delta t \rightarrow 0 \tag{6.1.19}$$

Con la demostración del teorema 6.1 se concluye que el esquema de Leendertse aplicado a las ecuaciones de Saint-Venant no conservativas es numéricamente consistente.

6.2. Construcción del sistema perturbado

Para determinar las propiedades de propagación del esquema de discretización de Leendertse aplicado a las ecuaciones de Saint-Venant no conservativas, se propone introducir una pequeña perturbación en las variables dependientes como se muestra a continuación:

$$H_j^n = \bar{H}_j^n + h_j^n \quad ; \quad \left\| \bar{H}_j^n \right\|_D \gg \left\| h_j^n \right\|_D \tag{6.2.1}$$

$$U_j^n = \bar{U}_j^n + u_j^n \quad ; \quad \left\| \bar{U}_j^n \right\|_D \gg \left\| u_j^n \right\|_D \tag{6.2.2}$$



En donde \bar{H}_j^n y \bar{U}_j^n son valores de referencia que tienen una variación suave o lenta dentro del dominio de solución, y h_j^n y u_j^n son pequeñas perturbaciones que actúan sobre los valores de referencia y presentan una variación brusca o rápida. Recuérdese que las variables de referencia y de perturbación son variables discretas y que sólo tienen valores en los puntos de la malla de discretización del dominio. Por tanto, para determinar las propiedades de propagación de perturbaciones se debe cumplir con los requerimientos de continuidad siguientes: sea un polinomio que pasa por cada punto del espacio de discretización $\Omega = \Omega(x_j, t_n)$, de manera que $\bar{H}_j^n = \bar{H}_j^n$ y $\bar{U}_j^n = \bar{U}_j^n$, y las perturbaciones son pequeñas variaciones sobre las variables de referencia de estos polinomios. Además, los polinomios \bar{H}_j^n y \bar{U}_j^n cumplen con los requisitos de continuidad de grado n . Con el fin de no cambiar la notación de las variables de referencia a times normal, se mantendrá la notación de las variables discretas, teniendo en cuenta que conservar la notación hará que no se pierdan las características de continuidad anteriormente descritas.

Una vez definidas las características de continuidad de la variables de referencia, se está en posibilidades de continuar con el estudio de propagación de perturbaciones, introduciendo las ecuaciones de perturbación (6.2.1) y (6.2.2) en el esquema de discretización en diferencias (6.1.1) y (6.1.2), de manera que

$$\mathcal{L}(H_j^n, U_j^n) = \mathcal{L}(\bar{H}_j^n + h_j^n, \bar{U}_j^n + u_j^n) \quad (6.2.3)$$

$$\mathcal{M}(H_j^n, U_j^n) = \mathcal{M}(\bar{H}_j^n + h_j^n, \bar{U}_j^n + u_j^n) \quad (6.2.4)$$

Debido a que los operadores de conservación de masa $\mathcal{L}()$ y cantidad de movimiento $\mathcal{M}()$ son no lineales, como se puede observar en las ecuaciones (6.1.1) y (6.1.2), y para determinar la influencia de las variables de perturbación sobre las variables de referencia, es necesario aplicar una expansión en serie de Fréchet-Taylor para aquellos términos que tengan una dependencia paramétrica sobre las variables dependientes, tal como se describe a continuación:

$$B(\bar{H}_j^n + h_j^n) = B(\bar{H}_j^n) + h_j^n \frac{\partial B(H_j^n)}{\partial H} \Big|_{\bar{H}} + O(\|h_j^n\|_D^2) \quad (6.2.5)$$

$$A(\bar{H}_j^n + h_j^n) = A(\bar{H}_j^n) + h_j^n \frac{\partial A(H_j^n)}{\partial H} \Big|_{\bar{H}} + O(\|h_j^n\|_D^2) \quad (6.2.6)$$



$$y(\bar{H}_j^n + h_j^n) = y(\bar{H}_j^n) + h_j^n \frac{\partial y(H_j^n)}{\partial H} \Big|_{\bar{H}} + O\left(\|h_j^n\|_D^2\right) \quad (6.2.7)$$

$$R(\bar{H}_j^n + h_j^n)^{-4/3} = R(\bar{H}_j^n)^{-4/3} - \frac{4}{3} h_j^n R(\bar{H}_j^n)^{-7/3} \frac{\partial R(H_j^n)}{\partial H} \Big|_{\bar{H}} + O\left(\|h_j^n\|_D^2\right) \quad (6.2.8)$$

Para manejar una notación más compacta en el desarrollo de las expansiones (6.2.5) y (6.2.8), se propone utilizar la siguiente notación:

$$\bar{B}_j^n \equiv B(\bar{H}_j^n) \quad (6.2.9)$$

$$\bar{A}_j^n \equiv A(\bar{H}_j^n) \quad (6.2.10)$$

$$\bar{y}_j^n \equiv y(\bar{H}_j^n) = \bar{H}_j^n + z_j \quad (6.2.11)$$

$$\bar{R}_j^n \equiv R(\bar{H}_j^n) \quad (6.2.12)$$

$$\bar{B}_{H_j^n} \equiv \frac{\partial B(H_j^n)}{\partial H} \Big|_{\bar{H}} \quad (6.2.13)$$

$$\bar{B}_j^n \equiv \frac{\partial A(H_j^n)}{\partial H} \Big|_{\bar{H}} \quad (6.2.14)$$

$$\bar{R}_{H_j^n} \equiv \frac{\partial R(H_j^n)}{\partial H} \Big|_{\bar{H}} \quad (6.2.15)$$

Entonces, las expansiones de Frechét-Taylor (6.2.5)-(6.2.8) se pueden escribir en forma compacta haciendo uso de ecuaciones (6.2.9)-(6.2.15), como se muestra a continuación:

$$B(\bar{H}_j^n + h_j^n) = \bar{B}_j^n + h_j^n \bar{B}_{H_j^n} + O\left(\|h_j^n\|_D^2\right) \quad (6.2.16)$$

$$A(\bar{H}_j^n + h_j^n) = \bar{A}_j^n + h_j^n \bar{B}_j^n + O\left(\|h_j^n\|_D^2\right) \quad (6.2.17)$$

$$y(\bar{H}_j^n + h_j^n) = \bar{y}_j^n + h_j^n + O\left(\|h_j^n\|_D^2\right) \quad (6.2.18)$$

$$R(\bar{H}_j^n + h_j^n)^{-4/3} = (\bar{R}_j^n)^{-4/3} - \frac{4}{3} h_j^n (\bar{R}_j^n)^{-7/3} \bar{R}_{H_j^n} + O\left(\|h_j^n\|_D^2\right) \quad (6.2.19)$$



Por otra parte, para evaluar la variación de la velocidad en el término de fricción en la ecuación de cantidad de movimiento (6.2.4) se considera que si $\left\| \bar{U}_j^n \right\|_D \gg \left\| u_j^n \right\|_D$, entonces el producto de las velocidades es

$$\begin{aligned} & \left| \bar{U}_{j+1/2}^n + u_{j+1/2}^n \right| \left(\bar{U}_{j+1/2}^{n+1} + u_{j+1/2}^{n+1} \right) = \text{sgn} \left(U_{j+1/2}^n \right) \left(\bar{U}_{j+1/2}^n + u_{j+1/2}^n \right) \left(\bar{U}_{j+1/2}^{n+1} + u_{j+1/2}^{n+1} \right) \\ & = \text{sgn} \left(U_{j+1/2}^n \right) \left[\bar{U}_{j+1/2}^n \bar{U}_{j+1/2}^{n+1} + \bar{U}_{j+1/2}^n u_{j+1/2}^{n+1} + \bar{U}_{j+1/2}^{n+1} u_{j+1/2}^n + O \left(\left\| u_j^n \right\|_D^2 \right) \right] \\ & = \left| \bar{U}_{j+1/2}^n \right| \left| \bar{U}_{j+1/2}^{n+1} \right| + \left| \bar{U}_{j+1/2}^n \right| u_{j+1/2}^{n+1} + \frac{\left| \bar{U}_{j+1/2}^n \right|}{\bar{U}_{j+1/2}^n} \bar{U}_{j+1/2}^{n+1} u_{j+1/2}^n + O \left(\left\| u_j^n \right\|_D^2 \right) \quad (6.2.20) \end{aligned}$$

Finalmente, la ecuación perturbada de conservación de masa se obtiene de sustituir las ecuaciones (6.2.16) y (6.2.17) en (6.2.3), y agrupando:

$$\begin{aligned} & \bar{B}_j \frac{\bar{H}_j^{n+1} - \bar{H}_j^n}{\Delta t} + \frac{1}{\Delta x} \left[\bar{U}_{j+1/2}^{n+1} \bar{A}_{j+1/2}^n - \bar{U}_{j-1/2}^{n+1} \bar{A}_{j-1/2}^n \right] + \bar{B}_j \frac{h_j^{n+1} - h_j^n}{\Delta t} + \\ & h_j^n \bar{B}_j \frac{\bar{H}_j^{n+1} - \bar{H}_j^n}{\Delta t} + \frac{1}{\Delta x} \left[u_{j+1/2}^{n+1} \bar{A}_{j+1/2}^n - u_{j-1/2}^{n+1} \bar{A}_{j-1/2}^n \right] + \quad (6.2.21) \\ & \frac{1}{\Delta x} \left[\bar{U}_{j+1/2}^{n+1} \bar{B}_{j+1/2}^n h_{j+1/2}^n - \bar{U}_{j-1/2}^{n+1} \bar{B}_{j-1/2}^n h_{j-1/2}^n \right] + O \left(\left\| h_j^n \right\|_D^2, \left\| h_j^n \right\|_D \left\| u_j^n \right\|_D \right) = 0 \end{aligned}$$

A su vez la ecuación perturbada de cantidad de movimiento se construye sustituyendo las ecuaciones (6.2.18), (6.2.19) y (6.2.20) en (6.2.4), y agrupando:

$$\begin{aligned} & \frac{\bar{U}_{j+1/2}^{n+1} - \bar{U}_{j+1/2}^n}{\Delta t} + \bar{U}_{j+1/2}^{n+1} \left(\frac{\bar{U}_{j+3/2}^n - \bar{U}_{j-1/2}^n}{2\Delta x} \right) + g \frac{\bar{y}_{j+1}^{n+1} - \bar{y}_j^{n+1}}{2\Delta x} + \frac{\alpha K_s^{1/3} \left| \bar{U}_{j+1/2}^n \right| \left| \bar{U}_{j+1/2}^{n+1} \right|}{\left(\bar{R}_{j+1/2}^n \right)^{4/3}} + \\ & \frac{u_{j+1/2}^{n+1} - u_{j+1/2}^n}{\Delta t} + u_{j+1/2}^{n+1} \left(\frac{\bar{U}_{j+3/2}^n - \bar{U}_{j-1/2}^n}{2\Delta x} \right) + \bar{U}_{j+1/2}^{n+1} \left(\frac{u_{j+3/2}^n - u_{j-1/2}^n}{2\Delta x} \right) + g \frac{h_{j+1}^{n+1} - h_j^{n+1}}{2\Delta x} + \quad (6.2.22) \\ & \frac{\alpha K_s^{1/3} \left| \bar{U}_{j+1/2}^n \right|}{\left(\bar{R}_{j+1/2}^n \right)^{4/3}} \left(u_{j+1/2}^{n+1} + \frac{\bar{U}_{j+1/2}^{n+1}}{\bar{U}_{j+1/2}^n} u_{j+1/2}^n \right) - \frac{4}{3} \frac{\alpha K_s^{1/3} \left| \bar{U}_{j+1/2}^n \right| \left| \bar{U}_{j+1/2}^{n+1} \right|}{\left(\bar{R}_{j+1/2}^n \right)^{7/3}} \bar{R}_{j+1/2}^n h_{j+1/2}^n + \\ & O \left[\left(\left\| h_j^n \right\|_D + \left\| u_j^n \right\|_D \right)^2 \right] = 0 \end{aligned}$$

Revisando las ecuaciones (6.2.21) y (6.2.22) se puede extraer la condición de referencia para los términos que solamente contienen a las variables de referencia. La agrupación de estos términos en cada ecuación satisface en



forma exacta a las ecuaciones de discretización de partida (6.1.1) y (6.1.2). Esta agrupación de términos se le denomina ecuaciones de referencia y son las siguientes:

$$\bar{B}_j^n \frac{\bar{H}_j^{n+1} - \bar{H}_j^n}{\Delta t} + \frac{1}{\Delta x} \left[\bar{U}_{j+1/2}^{n+1} \bar{A}_{j+1/2}^n - \bar{U}_{j-1/2}^{n+1} \bar{A}_{j-1/2}^n \right] = 0 \quad (6.2.23)$$

$$\frac{\bar{U}_{j+1/2}^{n+1} - \bar{U}_{j+1/2}^n}{\Delta t} + \bar{U}_{j+1/2}^{n+1} \left(\frac{\bar{U}_{j+3/2}^n - \bar{U}_{j-1/2}^n}{2\Delta x} \right) + g \frac{\bar{y}_{j+1}^{n+1} - \bar{y}_j^{n+1}}{2\Delta x} + \frac{\alpha K_s^{1/3} |\bar{U}_{j+1/2}^n| |\bar{U}_{j+1/2}^{n+1}|}{(\bar{R}_{j+1/2}^n)^{4/3}} = 0 \quad (6.2.24)$$

Los términos restantes de (6.2.21) y (6.2.22), eliminando la condición de referencia (6.2.23) y (6.2.24), son el sistema de ecuaciones que permiten evaluar el comportamiento de la propagación de las perturbaciones del esquema de Leendertse aplicado a las ecuaciones de Saint-Venant no conservativas. A estas ecuaciones se les conoce como ecuaciones de perturbación, y se muestran en seguida:

$$\begin{aligned} & \bar{B}_j^n \frac{h_j^{n+1} - h_j^n}{\Delta t} + h_j^n B_{H_j} \frac{\bar{H}_j^{n+1} - \bar{H}_j^n}{\Delta t} + \frac{1}{\Delta x} \left[u_{j+1/2}^{n+1} \bar{A}_{j+1/2}^n - u_{j-1/2}^{n+1} \bar{A}_{j-1/2}^n \right] + \\ & \frac{1}{\Delta x} \left[\bar{U}_{j+1/2}^{n+1} \bar{B}_{j+1/2}^n h_{j+1/2}^n - \bar{U}_{j-1/2}^{n+1} \bar{B}_{j-1/2}^n h_{j-1/2}^n \right] + O \left(\|h_j^n\|_D^2, \|h_j^n\|_D \|u_j^n\|_D \right) = 0 \end{aligned} \quad (6.2.25)$$

$$\begin{aligned} & \frac{u_{j+1/2}^{n+1} - u_{j+1/2}^n}{\Delta t} + u_{j+1/2}^{n+1} \left(\frac{\bar{U}_{j+3/2}^n - \bar{U}_{j-1/2}^n}{2\Delta x} \right) + \bar{U}_{j+1/2}^{n+1} \left(\frac{u_{j+3/2}^n - u_{j-1/2}^n}{2\Delta x} \right) + g \frac{h_{j+1}^{n+1} - h_j^{n+1}}{2\Delta x} + \\ & \frac{\alpha K_s^{1/3} |\bar{U}_{j+1/2}^n|}{(\bar{R}_{j+1/2}^n)^{4/3}} \left(u_{j+1/2}^{n+1} + \frac{\bar{U}_{j+1/2}^{n+1}}{\bar{U}_{j+1/2}^n} u_{j+1/2}^n \right) - \frac{4}{3} \frac{\alpha K_s^{1/3} |\bar{U}_{j+1/2}^n| |\bar{U}_{j+1/2}^{n+1}|}{(\bar{R}_{j+1/2}^n)^{7/3}} R_{H_{j+1/2}}^n h_{j+1/2}^n + \\ & + O \left[\left(\|h_j^n\|_D + \|u_j^n\|_D \right)^2 \right] = 0 \end{aligned} \quad (6.2.26)$$

6.3. Análisis de localización

Para aplicar un análisis de localización de las ecuaciones perturbadas (6.2.25) y (6.2.26), se hace necesario transformar los operadores de diferencias finitas a operadores continuos. Para lograr esta transformación se llevará a cabo un análisis de consistencia numérica a los operadores discretos, similar al realizado en el subcapítulo 6.1. Cabe mencionar que los requisitos de continuidad de las variables son suficientes, como se mencionó en el subcapítulo 6.2.



Entonces, para realizar el análisis de consistencia numérica de las ecuaciones de diferencias (6.2.25) y (6.2.26), se puede hacer uso de las expansiones en serie de Taylor (6.1.3)-(6.1.9) y (6.1.11)-(6.1.16), que definen el comportamiento de las variables de referencia. Por otra parte, para las variables de perturbación y generadas producto de la expansión en serie de Fréchet-Taylor sobre los términos con dependencia paramétrica, es necesario considerar las siguientes expansiones en serie de Taylor:

$$h_j^n = h(x_j, t_n) = h \tag{6.3.1}$$

$$\bar{B}_H^n = \bar{B}_H(x_j, t_n) = \bar{B}_H \tag{6.3.2}$$

$$\begin{aligned} u_{j+1/2}^{n+1} &= u(x_{j+1/2}, t_{n+1}) \\ &= u(x + \Delta x/2, t + \Delta t) \\ &= u + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{(x,t)} + \Delta t \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{(x,t)} + \frac{\Delta x^2}{8} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{(x,t)} + \\ &\quad \frac{\Delta x \Delta t}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \Big|_{(x,t)} + \frac{\Delta t^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big|_{(x,t)} + O[(\Delta x + \Delta t)^3] \end{aligned} \tag{6.3.3}$$

$$\begin{aligned} u_{j-1/2}^{n+1} &= u(x_{j-1/2}, t_{n+1}) \\ &= u(x - \Delta x/2, t + \Delta t) \\ &= u - \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{(x,t)} + \Delta t \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{(x,t)} + \frac{\Delta x^2}{8} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{(x,t)} - \\ &\quad \frac{\Delta x \Delta t}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \Big|_{(x,t)} + \frac{\Delta t^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big|_{(x,t)} + O[(\Delta x + \Delta t)^3] \end{aligned} \tag{6.3.4}$$

$$\begin{aligned} \bar{B}_{j+1/2}^n &= \bar{B}(x_{j+1/2}, t_n) \\ &= \bar{B}(x + \Delta x/2, t) \\ &= \bar{B} + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial \bar{B}}{\partial x} \Big|_{(x,t)} + \frac{\Delta x^2}{8} \frac{\partial^2 \bar{B}}{\partial x^2} \Big|_{(x,t)} + O(\Delta x^3) \end{aligned} \tag{6.3.5}$$

$$\begin{aligned} h_{j+1/2}^n &= h(x_{j+1/2}, t_n) \\ &= h(x + \Delta x/2, t) \\ &= h + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial h}{\partial x} \Big|_{(x,t)} + \frac{\Delta x^2}{8} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \Big|_{(x,t)} + O(\Delta x^3) \end{aligned} \tag{6.3.6}$$



$$\begin{aligned}
 h_{j-1/2}^n &= h(x_{j-1/2}, t_n) \\
 &= h(x - \Delta x/2, t) \\
 &= h - \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial h}{\partial x} \Big|_{(x,t)} + \frac{\Delta x^2}{8} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \Big|_{(x,t)} + O(\Delta x^3)
 \end{aligned} \tag{6.3.7}$$

$$\begin{aligned}
 u_{j+1/2}^n &= u(x_{j+1/2}, t_n) \\
 &= u(x + \Delta x/2, t) \\
 &= u + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{(x,t)} + \frac{\Delta x^2}{8} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{(x,t)} + O(\Delta x^3)
 \end{aligned} \tag{6.3.8}$$

$$\begin{aligned}
 u_{j+3/2}^n &= u(x_{j+3/2}, t_n) \\
 &= u(x + 3\Delta x/2, t) \\
 &= u + \frac{3\Delta x}{2} \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{(x,t)} + \frac{9\Delta x^2}{8} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{(x,t)} + O(\Delta x^3)
 \end{aligned} \tag{6.3.9}$$

$$\begin{aligned}
 u_{j-1/2}^n &= u(x_{j-1/2}, t_n) \\
 &= u(x - \Delta x/2, t) \\
 &= u - \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{(x,t)} + \frac{\Delta x^2}{8} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{(x,t)} + O(\Delta x^3)
 \end{aligned} \tag{6.3.10}$$

$$\begin{aligned}
 (\bar{R}_{j+1/2}^n)^{-7/3} &= [\bar{R}(x_{j+1/2}, t_n)]^{-7/3} \\
 &= [\bar{R}(x + \Delta x/2, t)]^{-7/3} \\
 &= \bar{R}^{-7/3} - \frac{7\Delta x}{6} \bar{R}^{-10/3} \frac{\partial \bar{R}}{\partial x} \Big|_{(x,t)} + \frac{15\Delta x^2}{12} \bar{R}^{-13/3} \frac{\partial^2 \bar{R}}{\partial x^2} \Big|_{(x,t)} + O(\Delta x^3)
 \end{aligned} \tag{6.3.11}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{R}_H^n_{j+1/2} &= \bar{R}_H(x_{j+1/2}, t_n) \\
 &= \bar{R}_H(x + \Delta x/2, t) \\
 &= \bar{R}_H + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial \bar{R}_H}{\partial x} \Big|_{(x,t)} + \frac{\Delta x^2}{8} \frac{\partial^2 \bar{R}_H}{\partial x^2} \Big|_{(x,t)} + O(\Delta x^3)
 \end{aligned} \tag{6.3.12}$$

Entonces, aplicando las expansiones en serie de Taylor (6.1.3)-(6.1.19) y (6.3.1)-(6.3.7) en la ecuación perturbada de conservación de masa (6.2.25), y presentado sólo los términos con orden superior al lineal, se tiene



$$\begin{aligned} & \bar{B} \frac{\partial h}{\partial t} + \bar{U} \bar{B} \frac{\partial h}{\partial x} + \left(\bar{B}_H \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} + \bar{B} \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + \bar{U} \frac{\partial \bar{B}}{\partial x} \right) h + \bar{A} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \bar{A}}{\partial x} u + \\ & \Delta t \left[\frac{1}{2} \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} + \frac{1}{2} h B_H \frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial t^2} + \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial \bar{A}}{\partial x} + \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial t \partial x} \bar{A} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial t} \bar{B} h \right) \right] + \\ & O \left[\|h\|^2, \|h\| \|u\|, (\Delta x + \Delta t)^2 \right] = 0 \end{aligned} \tag{6.3.13}$$

Y para la ecuación perturbada de cantidad de movimiento (6.2.26) se sustituyen las expansiones de Taylor (6.1.6), (6.1.11)-(6.1.16), (6.3.6) y (6.3.8)-(6.3.12). Desarrollando, se tiene

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + \bar{U} \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{2\alpha K_s^{1/3} |\bar{U}| u}{\bar{R}^{4/3}} - \frac{4}{3} \frac{\alpha K_s^{1/3} |\bar{U}| \bar{U}}{\bar{R}^{7/3}} R_H h + \\ & \Delta x \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (h + u\bar{U}) \right] + \right. \\ & \left. \frac{\alpha K_s^{1/3}}{\bar{R}^{7/3}} \left[\frac{\partial (|\bar{U}| u)}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{|\bar{U}|}{\bar{R}} \frac{\partial \bar{R}}{\partial x} + \frac{|\bar{U}|}{\bar{R}} \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial x} R_H h + \frac{1}{2} \bar{U} \frac{\partial (\bar{R}_H h)}{\partial x} - \frac{7}{12} \frac{\bar{U} R_H}{\bar{R}} \frac{\partial \bar{R}}{\partial x} h \right) \right] \right\} + \\ & \Delta t \left[\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \bar{U}}{\partial t} + \frac{\alpha K_s^{1/3}}{\bar{R}^{4/3}} \left(\frac{\partial (|\bar{U}| u)}{\partial t} + \frac{|\bar{U}| \bar{R}_H}{\bar{R}} \frac{\partial \bar{U}}{\partial t} h \right) \right] + \\ & O \left[\left(\|h_j^n\|_D + \|u_j^n\|_D \right)^2, (\Delta x + \Delta t)^2 \right] = 0 \end{aligned} \tag{6.3.14}$$

En la ecuación anterior, la elevación de la superficie libre del agua desde de un nivel de referencia es la suma del tirante más la elevación de la plantilla del fondo del canal, de manera que $\bar{h} = h(\bar{A}; x, t) = y(\bar{A}; x, t) + z(x)$, donde $y(\bar{A}; x, t)$ es el tirante de la sección transversal y $z_b(x)$ la elevación de la plantilla del fondo del canal. Además, si la variación de la plantilla del fondo del canal permanece constante se puede considerar que $\partial z(x)/\partial x = -S_b$, donde S_b es la pendiente de la plantilla del canal. Finalmente, tomando en cuenta las consideraciones con respecto a la elevación de la superficie libre del agua en el sistema de ecuaciones (6.3.13) y (6.3.14), y considerando sólo los términos de orden lineal, se tiene:

$$\begin{aligned} & \bar{B} \frac{\partial h}{\partial t} + \bar{U} \bar{B} \frac{\partial h}{\partial x} + \left(B_H \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} + \bar{B} \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + \bar{U} \frac{\partial \bar{B}}{\partial x} \right) h + \\ & \bar{A} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \bar{A}}{\partial x} u + O \left(\|h\|^2, \|h\| \|u\|, \Delta x, \Delta t \right) = 0 \end{aligned} \tag{6.3.15}$$



$$\frac{\partial u}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + g \bar{S}_{f_U} \right) u + g \frac{\partial h}{\partial x} + g \bar{S}_{f_H} h + O \left[\left(\|h_j^n\|_D + \|u_j^n\|_D \right)^2, \Delta x, \Delta t \right] = 0 \quad (6.3.16)$$

En la ecuación (6.3.16) se han utilizado las variables simplificatorias \bar{S}_{f_H} y \bar{S}_{f_U} , y éstas son similares a las definidas en el apartado (4.2.1) (ecuaciones 4.2.13 y 4.2.14).

Una vez transformado el sistema (6.3.15) y (6.3.16) a una forma continua, se está en posibilidades de llevar a cabo el análisis de escalas múltiples para determinar si cada uno de los términos de estas ecuaciones son de igual magnitud.

Entonces, sea un punto arbitrario de referencia (x_o, t_o) en el espacio de solución Ω alejado de la frontera $\partial\Omega$, y tomando en cuenta que las ecuaciones por escalar (6.3.15) y (6.3.16) tienen una formulación muy similar a las ecuaciones de perturbación (4.2.22) y (4.2.23), analizadas en el subcapítulo (4.2) y que fueron desarrolladas en el subcapítulo 4.2.2. Por tanto, si las variables de referencia cumplen con la separación de escalas (4.2.24)-(4.2.29), entonces es posible tomar en cuenta los siguientes escalamientos: para las variables de referencia (4.2.33)-(4.2.38); para las variables independientes de escala lenta (4.2.30), (4.2.31) y escala rápida (4.2.43) y (4.2.44); para las variables de perturbación (4.2.47) y (4.2.48), y para delimitar la relación entre las escalas lentas y rápidas (4.2.46). Tomando en cuenta los escalamientos anteriores, y sustituyendo las escalas (4.2.33), (4.2.34), (4.2.47) y (4.2.48) en la ecuación perturbada de masa (6.3.15), y desarrollando, se tiene

$$\begin{aligned} & \frac{\varepsilon H_o B_o}{\Lambda_t} B^* \frac{\partial h^*}{\partial \tau} + \frac{\varepsilon H_o U_o B_o}{\Lambda_x} U^* B^* \frac{\partial h^*}{\partial \zeta} + \frac{\varepsilon A_o U_o}{\Lambda_x} A^* \frac{\partial u^*}{\partial \zeta} + \frac{\varepsilon A_o U_o}{\mathcal{L}} \frac{\partial A^*}{\partial X} u^* + \\ & \varepsilon H_o \left(\frac{B_o}{\mathcal{E}} B_H^* \frac{\partial H^*}{\partial \Gamma} + \frac{B_o U_o}{\mathcal{L}} B^* \frac{\partial U^*}{\partial X} + \frac{B_o U_o}{\mathcal{L}} U^* \frac{\partial B^*}{\partial X} \right) h^* + O(\varepsilon^2) = 0 \end{aligned} \quad (6.3.17)$$

Para escalar la ecuación de cantidad de movimiento (6.3.16) se sustituyen las escalas (4.2.34), (4.2.37), (4.2.38), (4.2.47) y (4.2.48), y desarrollando:

$$\begin{aligned} & \frac{\varepsilon U_o}{\Lambda_t} \frac{\partial u^*}{\partial \tau} + \frac{\varepsilon U_o^2}{\Lambda_x} U^* \frac{\partial u^*}{\partial \zeta} + \varepsilon U_o \left(\frac{U_o}{\mathcal{L}} \frac{\partial U^*}{\partial X} + g \frac{S_{f_o}}{U_o} S_{f_U}^* \right) u^* + \\ & g \frac{\varepsilon H_o}{\Lambda_x} \frac{\partial h^*}{\partial \zeta} + g \varepsilon S_{f_o} S_{f_H}^* h^* + O(\varepsilon^2) = 0 \end{aligned} \quad (6.3.18)$$

Reordenando las ecuaciones (6.3.17) y (6.3.18) en función del primer término de cada ecuación respectivamente, se tiene



$$B^* \frac{\partial h^*}{\partial \tau} + U^* B^* \frac{\partial h^*}{\partial \zeta} + A^* \frac{\partial u^*}{\partial \zeta} + \varepsilon \frac{\partial A^*}{\partial X} u^* + \varepsilon \left(B_H^* \frac{\partial H^*}{\partial \Gamma} + B^* \frac{\partial U^*}{\partial X} + U^* \frac{\partial B^*}{\partial X} \right) h^* + O(\varepsilon) = 0 \quad (6.3.19)$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial \tau} + U^* \frac{\partial u^*}{\partial \zeta} + \varepsilon \frac{\partial U^*}{\partial X} u^* + g \frac{H_o}{U_o^2} \frac{\partial h^*}{\partial \zeta} + g \frac{\varepsilon \mathcal{L} S_{fo}}{U_o^2} (S_{fv}^* u^* + S_{fH}^* h^*) + O(\varepsilon) = 0 \quad (6.3.20)$$

En la ecuación (6.3.20) se pueden evaluar los escalamientos para $gH_o/U_o^2 = F_r^{-2} = O(1)$ y para el término de fricción $g\mathcal{L}/U_o^2 S_{fo} = O(1/\delta)$ (ecuación 4.1.63) y $g\mathcal{L}/U_o^2 S_o = O(1/\delta)$ (ecuación 4.1.65). Tomando en cuenta las magnitudes de escalamiento anteriores, y tomando sólo términos de orden $O(\varepsilon)$, entonces las ecuaciones (6.3.19) y (6.3.20) se pueden escribir de la forma siguiente:

$$B^* \frac{\partial h^*}{\partial \tau} + U^* B^* \frac{\partial h^*}{\partial \zeta} + A^* \frac{\partial u^*}{\partial \zeta} + O(\varepsilon) = 0 \quad (6.3.21)$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial \tau} + U^* \frac{\partial u^*}{\partial \zeta} + g \frac{H_o}{U_o^2} \frac{\partial h^*}{\partial \zeta} + g \frac{\varepsilon \mathcal{L} S_{fo}}{U_o^2} (S_{fv}^* u^* + S_{fH}^* h^*) + O(\varepsilon) = 0 \quad (6.3.22)$$

Realizando una comparación del sistema de ecuaciones escalado (6.3.21) y (6.3.22) con el sistema escalado en el subcapítulo (4.2.2) (ecuaciones 4.2.51 y 4.2.53), se concluye que son similares. Por tanto, el procedimiento del análisis de localización tendrá el mismo resultado y entonces, el sistema de ecuaciones localizadas en su versión dimensional son

$$\frac{\partial h}{\partial t} + U_o \frac{\partial h}{\partial x} + D_o \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (6.3.23)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + U_o \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} + F_3 h + F_4 u = 0 \quad (6.3.24)$$

donde los términos F_3 y F_4 son definidos por las ecuaciones (4.2.69) y (4.2.70) respectivamente.

El sistema de ecuaciones (6.3.23) y (6.3.24) es un problema de valor inicial puro bien planteado, lineal y de coeficientes constantes para un espacio de solución $x \in (-\infty, \infty)$. Retomando la propuesta de discretización en diferencias finitas propuesto por Leendertse, se tiene

$$\frac{h_j^{n+1} - h_j^n}{\Delta t} + \frac{D_o}{\Delta x} (u_{j+1/2}^{n+1} - u_{j-1/2}^{n+1}) + \frac{U_o}{\Delta x} (h_{j+1/2}^n - h_{j-1/2}^n) = 0 \quad (6.3.25)$$



$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \frac{U_o}{2\Delta x} (u_{j+3/2}^n - u_{j-1/2}^n) + \frac{g}{\Delta x} (h_{j+1}^{n+1} - h_j^{n+1}) + F_1 h_{j+1/2}^n + F_2 (u_{j+1/2}^{n+1} + u_{j+1/2}^n) = 0 \quad (6.3.26)$$

Como se puede observar, el sistema de ecuaciones anteriores es el resultado de escalar las ecuaciones algebraicas no lineales (6.1.1) y (6.1.2). Se obtiene así un sistema de ecuaciones algebraicas lineales al cual se delimitará su condición de estabilidad aplicando el método de Fourier en el apartado siguiente.

6.4. Análisis de estabilidad

Debido a que el sistema de ecuaciones (6.3.25) y (6.3.26) es puro, lineal y de coeficientes constantes, se puede solucionar aplicando una expansión en serie discreta de Fourier, y las componentes discretas de Fourier para las variables de perturbación se definen como se muestra a continuación:

$$h_j^n = h(j \Delta x, n \Delta t, m) = \hat{h}_m \rho_m^n e^{i k j \Delta x} \quad (6.4.1)$$

$$u_j^n = u(j \Delta x, n \Delta t, m) = \hat{u}_m \rho_m^n e^{i k j \Delta x} \quad (6.4.2)$$

donde \hat{h}_m y \hat{u}_m representan las amplitudes para el m -ésimo modo de Fourier; ρ_m^n , el factor de amplitud modificado asociado con el m -ésimo modo; $i = \sqrt{-1}$ y k el número de onda adimensional que corresponde para m -ésimo modo.

Entonces, sustituyendo las ecuaciones (6.4.1) y (6.4.2) en (6.3.25) y (6.3.26) para un modo arbitrario de Fourier, y desarrollando:

$$\rho^n e^{i k j \Delta x} \{ \hat{h}(\rho - 1 + 2iU_o \lambda s) + \hat{u} 2iD_o \rho \lambda s \} = 0 \quad (6.4.3)$$

$$\rho^n e^{i k j \Delta x} \{ \hat{h}(2ig \rho \lambda s + F_1 \Delta t) + \hat{u} [\rho - 1 + 2iU_o \lambda s c + F_2 \Delta t(\rho + 1)] \} = 0 \quad (6.4.4)$$

donde $\lambda = \Delta x / \Delta t$, $s = \text{sen}(k \Delta x / 2)$ y $c = \text{cos}(k \Delta x / 2)$

El sistema de ecuaciones (6.4.3) y (6.4.4) se puede presentar en forma de un arreglo matricial, como se muestra a continuación:

$$\rho^n e^{i k j \Delta x} \begin{bmatrix} \rho - 1 + 2iU_o \lambda s & 2iD_o \rho \lambda s \\ 2ig \rho \lambda s + F_1 \Delta t & \rho - 1 + 2iU_o \lambda s c + F_2 \Delta t(\rho + 1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{h} \\ \hat{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.4.5)$$

Además, el sistema matricial anterior tiene una solución diferente a la trivial, si y sólo si el determinante de la matriz de coeficiente es nulo. Calculando el determinante de coeficientes e igualando a cero se tiene

$$(\rho - 1 + 2iU_o \lambda s) [\rho - 1 + 2iU_o \lambda s c + F_2 \Delta t(\rho + 1)] - 2iD_o \rho \lambda s (2ig \rho \lambda s + F_1 \Delta t) = 0 \quad (6.4.6)$$



Extrayendo la relación de dispersión de (6.4.5)

$$\rho = -\frac{B+iC}{2A} \pm \frac{1}{2A} \sqrt{(B+iC)^2 - 4A(D+iE)} \quad (6.4.7)$$

donde los coeficientes A , B , C y D se definen como

$$A = 1 + 4gD_o\lambda^2 s^2 + F_2\Delta t \quad (6.4.8)$$

$$B = -2 \quad (6.4.9)$$

$$C = 2\lambda s[U_o(c + F_2\Delta t) - D_oF_1\Delta t] \quad (6.4.10)$$

$$D = 1 - 4U_o^2\lambda^2 s^2 c - F_2\Delta t \quad (6.4.11)$$

$$E = 2U_o\lambda s(c - 1 + F_2\Delta t) \quad (6.4.12)$$

Aplicando, la condición de estabilidad crítica para $|\rho| \leq 1$ en la relación de dispersión (6.4.7), de forma que

$$\left| -\frac{B+iC}{2A} \pm \frac{1}{2A} \sqrt{(B+iC)^2 - 4A(D+iE)} \right| \leq 1 \quad \forall m \quad (6.4.13)$$

La inecuación (6.4.13) indica la condición de estabilidad límite del esquema de Leendertse, aplicado a las ecuaciones de Saint-Venant no conservativas. Con el fin de conocer cómo se comporta esta condición límite de estabilidad para diversas condiciones de flujo, en el subcapítulo 6.5 se presentarán los retratos de amplitud y fase, con lo cual se engloba el estudio de propagación de perturbaciones de este esquema.

6.5. Elaboración de retratos de amplitud y fase

La graficación de los retratos de amplitud y fase de la relación de dispersión del esquema de Leendertse (ecuación 6.4.13) se lleva a cabo según la siguiente secuencia:

a) Condición de flujo subcrítico

Los datos generales de la sección transversal y de la topología del cauce para considerar la generación de las pruebas numéricas son:

Gasto (Q)	= 300 m ³ /s
Ancho de la base (b)	= 200 m
Talud (ak)	= 1:4
Tirante crítico (y_c)	= 0.6096 m
Rugosidad de Manning (n)	= 0.025
Longitud del Cauce (L)	= 25,000 m
Discretización espacial (Δx)	= 62.5 m



Las variaciones de las condiciones de flujo se definieron cambiando la pendiente del fondo del canal, y la clasificación de los retratos de amplitud se muestra en la tabla 6.1, para los retratos de fase en la tabla 6.2, los retratos de amplitud se presentan en la láminas 6.1-6.4 y los de fase en las láminas 6.8-6.11. Estos retratos consideran los números de Courant $C_r = \{0.01, 0.11, 2, 5, 10, 30, 50, 75, 150\}$.

Nombre de identificación del retrato de amplitud	Condición de flujo			
	Pendiente (S_b)	Tirante normal (y_n)	Número de Froude (F_r)	Número de Verdernikov (V_e)
Ret_amp_Fs01Le	0.0001	2.1918	0.1443	0.0961
Ret_amp_Fs02Le	0.001	1.1032	0.4087	0.2608
Ret_amp_Fs03Le	0.005	0.6818	0.8448	0.5480
Ret_amp_Fs04Le	0.007	0.6165	0.9832	0.6394

Tabla 6.1. Clasificación de los retratos de amplitud para flujo subcrítico del esquema de Leendertse.

Nombre de identificación del retrato de fase	Condición de flujo			
	Pendiente (S_b)	Tirante normal (y_n)	Número de Froude (F_r)	Número de Verdernikov (V_e)
Ret_fas_Fs01Le	0.0001	2.1918	0.1443	0.0961
Ret_fas_Fs02Le	0.001	1.1032	0.4087	0.2608
Ret_fas_Fs03Le	0.005	0.6818	0.8448	0.5480
Ret_fas_Fs04Le	0.007	0.6165	0.9832	0.6394

Tabla 6.2. Clasificación de los retratos de fase para flujo subcrítico del esquema de Leendertse.

b) Condición de flujo supercrítico:

En este caso, los datos generales de la sección transversal y de la topología del cauce para considerar la generación de las pruebas numéricas se definen a continuación:

Gasto (Q)	= 300 m ³ /s
Ancho de la base (b)	= 200 m
Talud (ak)	= 1:4
Tirante crítico (y_c)	= 0.6096 m
Rugosidad de Manning (n)	= 0.025
Longitud del Cauce (L)	= 25,000 m
Discretización espacial (Δx)	= 62.5 m



Las variaciones de las condiciones de flujo se definieron cambiando la pendiente del fondo del canal. La clasificación de los retratos de amplitud se muestran en la tabla 6.3; para los retratos de fase, en la tabla 6.4. Los retratos de amplitud se presentan en la láminas 6.5-6.7, y los de fase en las láminas 6.12-6.14. Estos retratos consideran los números de Courant $C_r = \{0.01, 0.11, 2, 5, 10, 30, 50, 75, 150\}$.

Nombre de identificación del retrato de amplitud	Condición de flujo			
	Pendiente (S_b)	Tirante normal (y_n)	Número de Froude (F_r)	Número de Verdnikov (V_e)
Ret_amp_Ft01Le	0.008	0.5923	1.0443	0.6798
Ret_amp_Ft02Le	0.01	0.5541	1.1548	0.7529
Ret_amp_Ft03Le	0.02	0.4502	1.5782	1.0332

Tabla 6.3. Clasificación de los retratos de amplitud para flujo supercrítico del esquema de Leendertse.

Nombre de identificación del retrato de amplitud	Condición de flujo			
	Pendiente (S_b)	Tirante normal (y_n)	Número de Froude (F_r)	Número de Verdnikov (V_e)
Ret_fas_Ft01Le	0.008	0.5923	1.0443	0.6798
Ret_fas_Ft02Le	0.01	0.5541	1.1548	0.7529
Ret_fas_Ft03Le	0.02	0.4502	1.5782	1.0332

Tabla 6.4. Clasificación de los retratos de fase para flujo supercrítico del esquema de Leendertse.

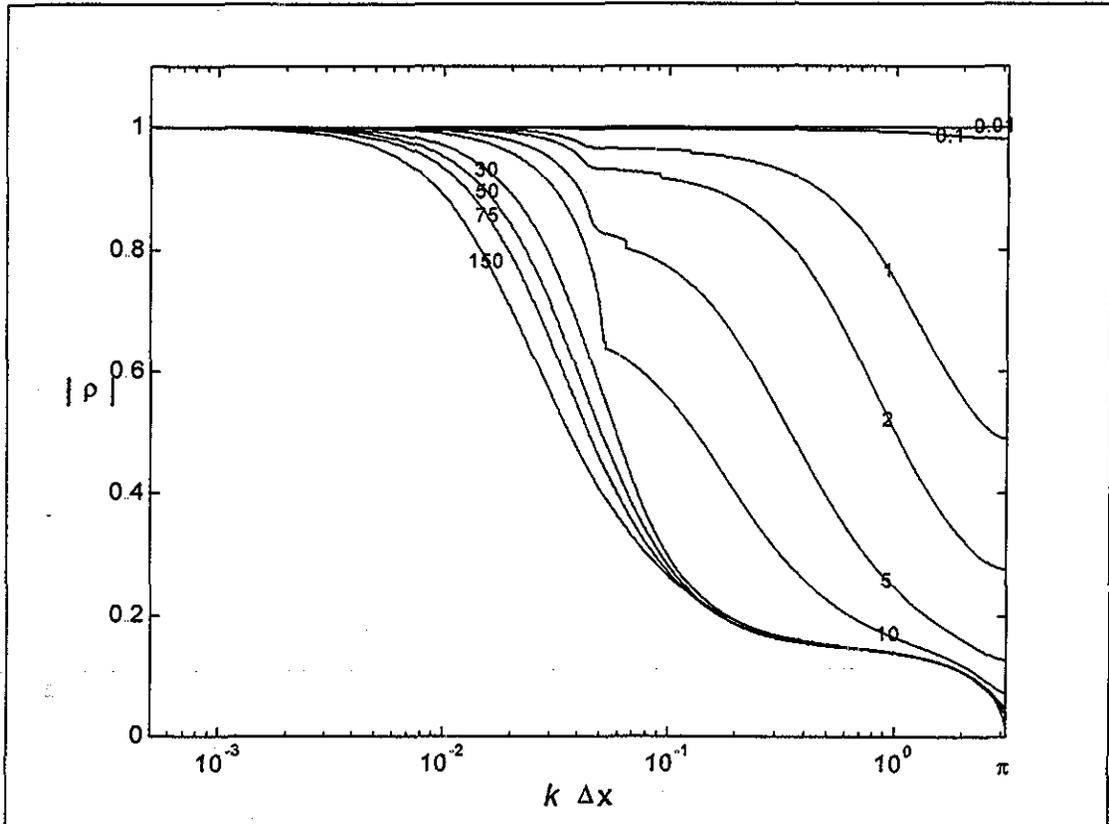


Lámina 6.1. Caso Ret_amp_Fs01Le.

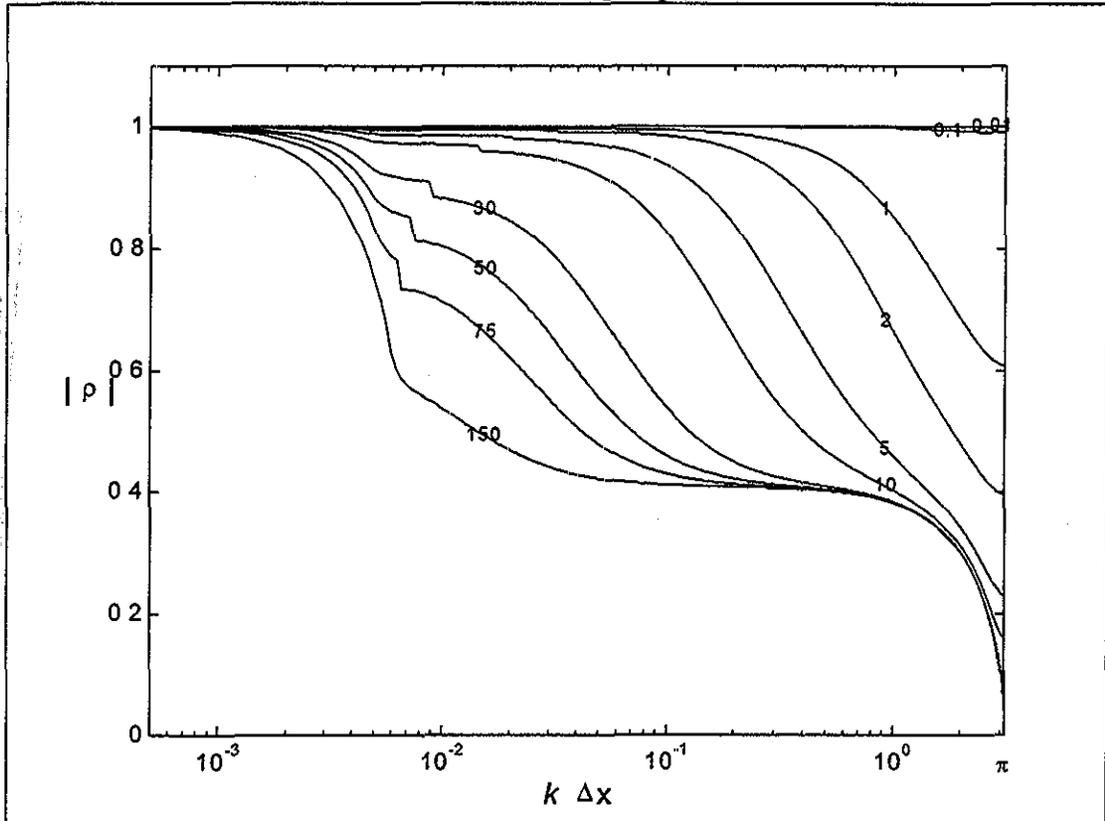


Lámina 6.2. Caso Ret_amp_Fs02Le.

LIBRARY DE CONSERVACION MARITIMA

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

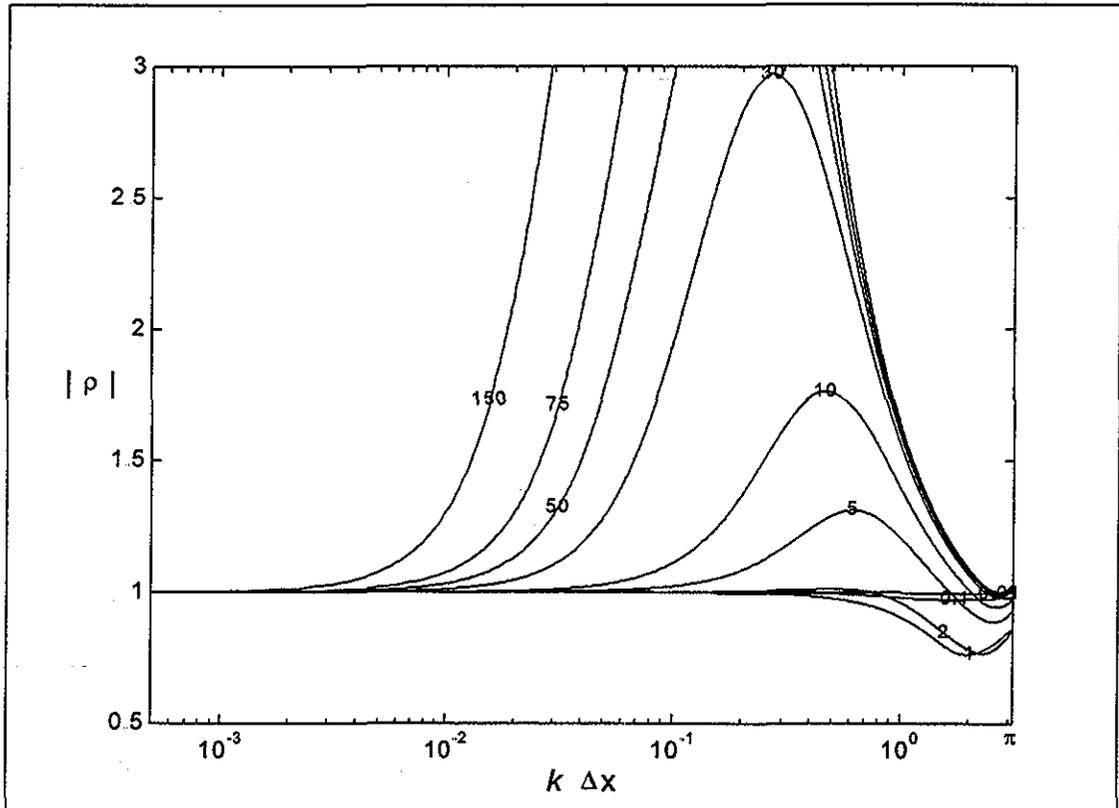


Lámina 6.3. Caso Ret_amp_Fs03Le.

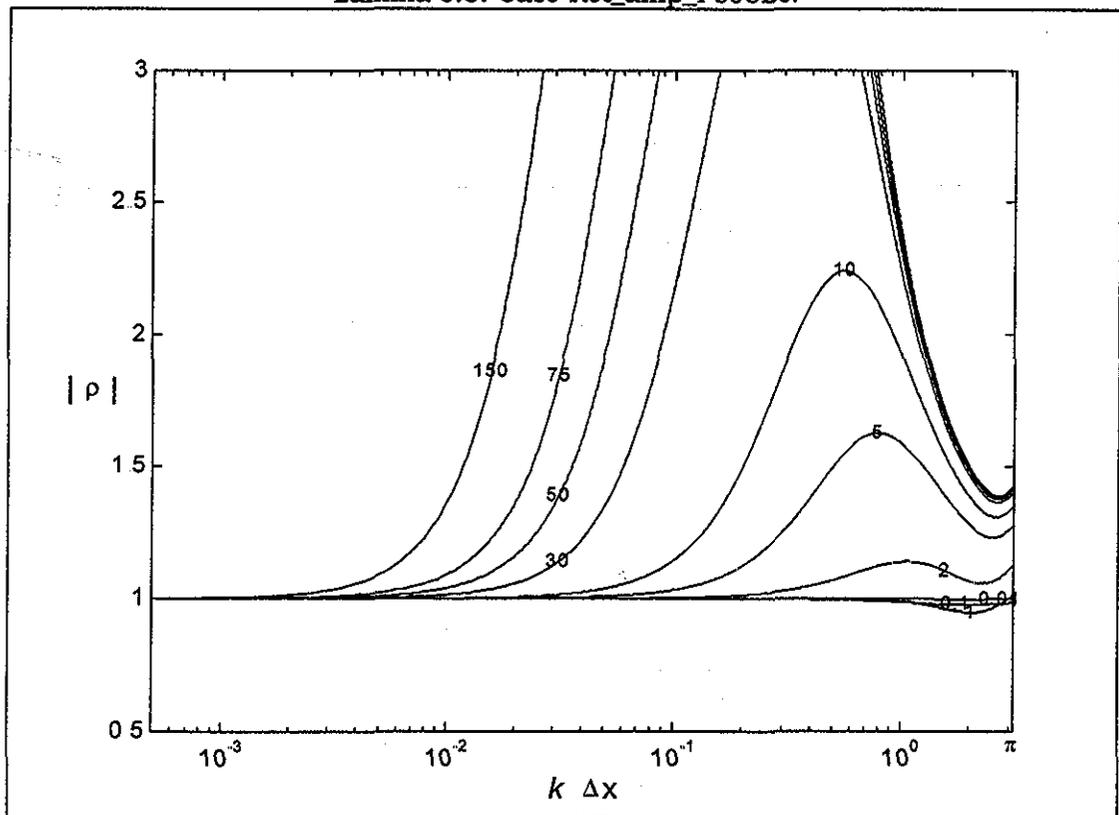


Lámina 6.4. Caso Ret_amp_Fs04Le.

UNIVERSIDAD DE CUCUTA
LIBRO CON
75/1

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

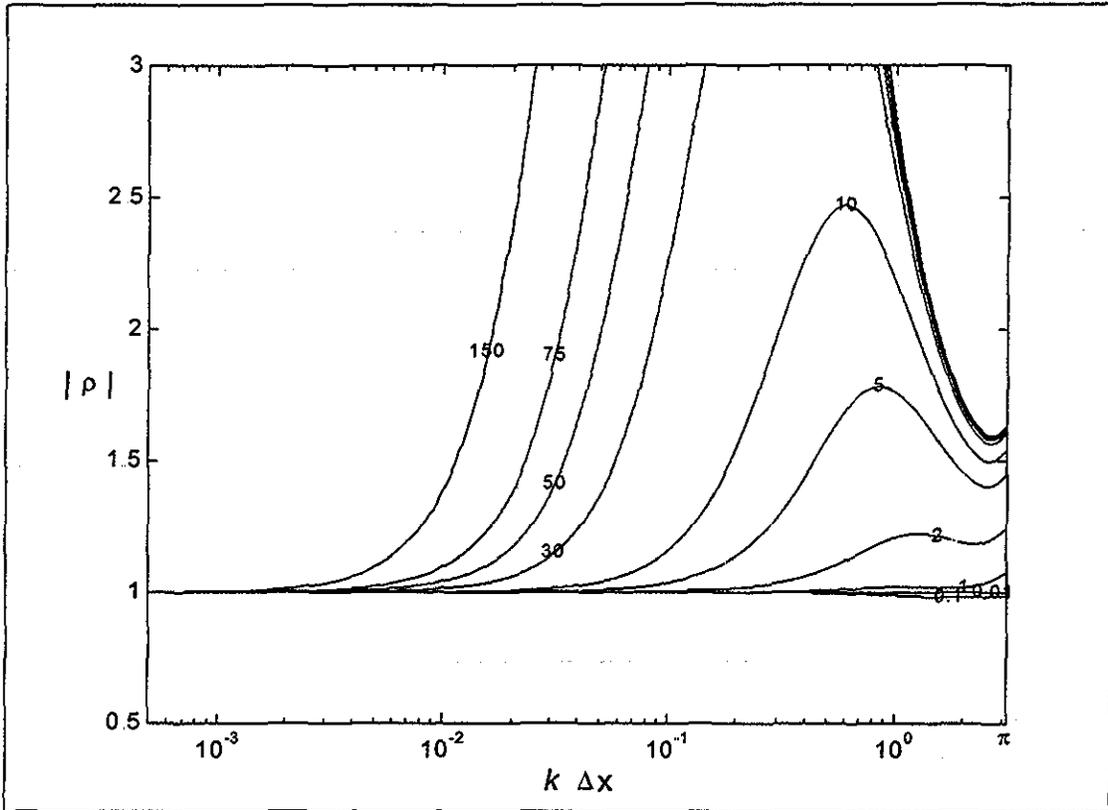


Lámina 6.5. Caso Ret_amp_Ft01Le.

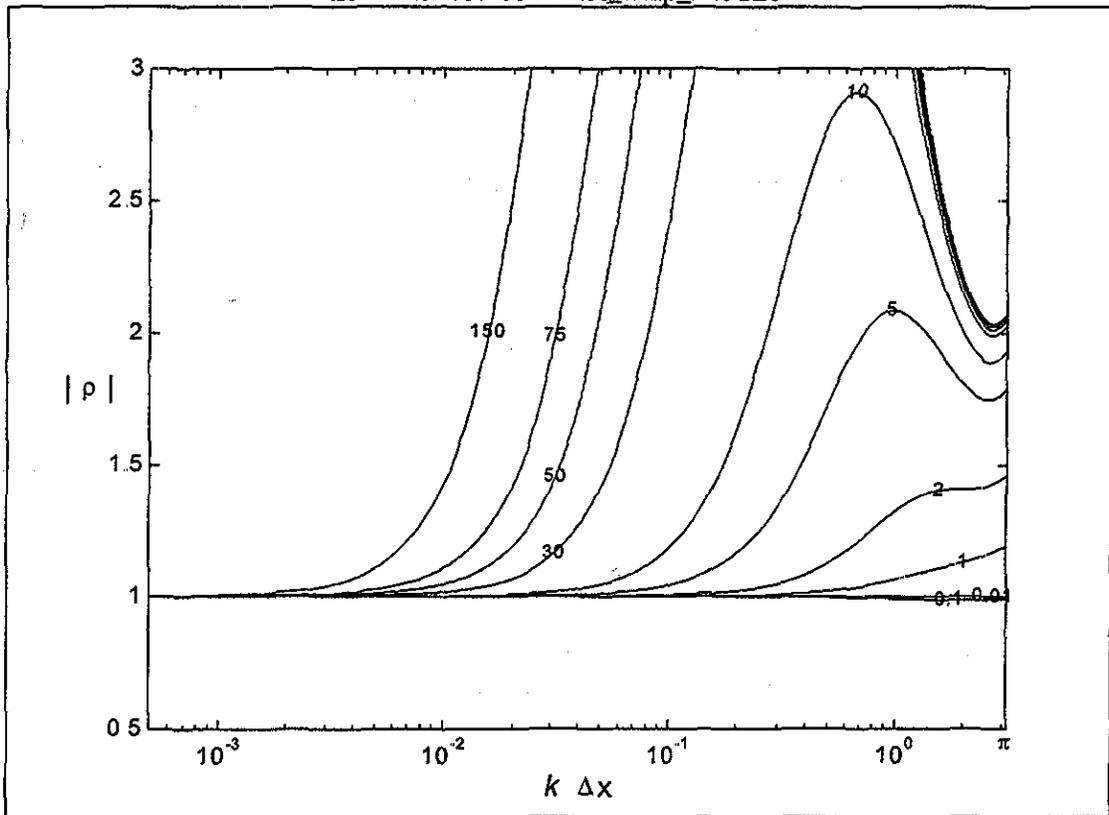


Lámina 6.6 Caso. Ret_amp_Ft02Le.

UNIVERSIDAD DE ORIENTE
LIBERTADOR
FALLA DE ORIGEN

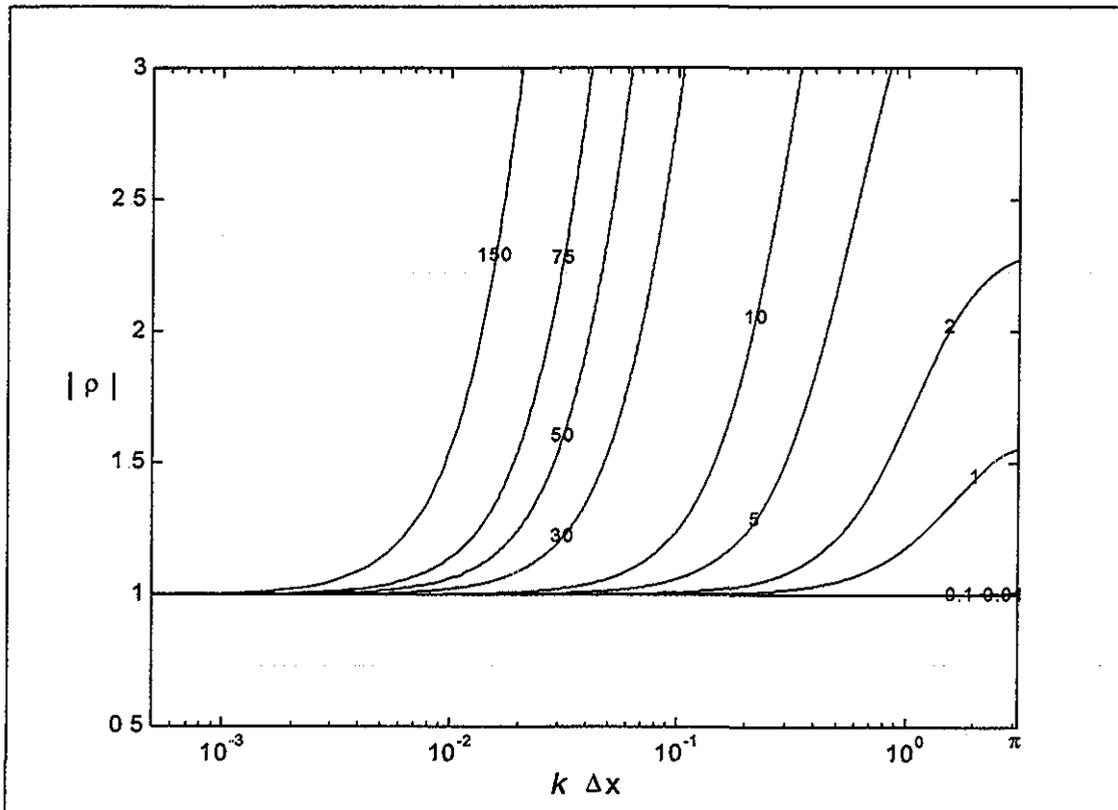


Lámina 6.7. Caso Ret_amp_Ft03Le.

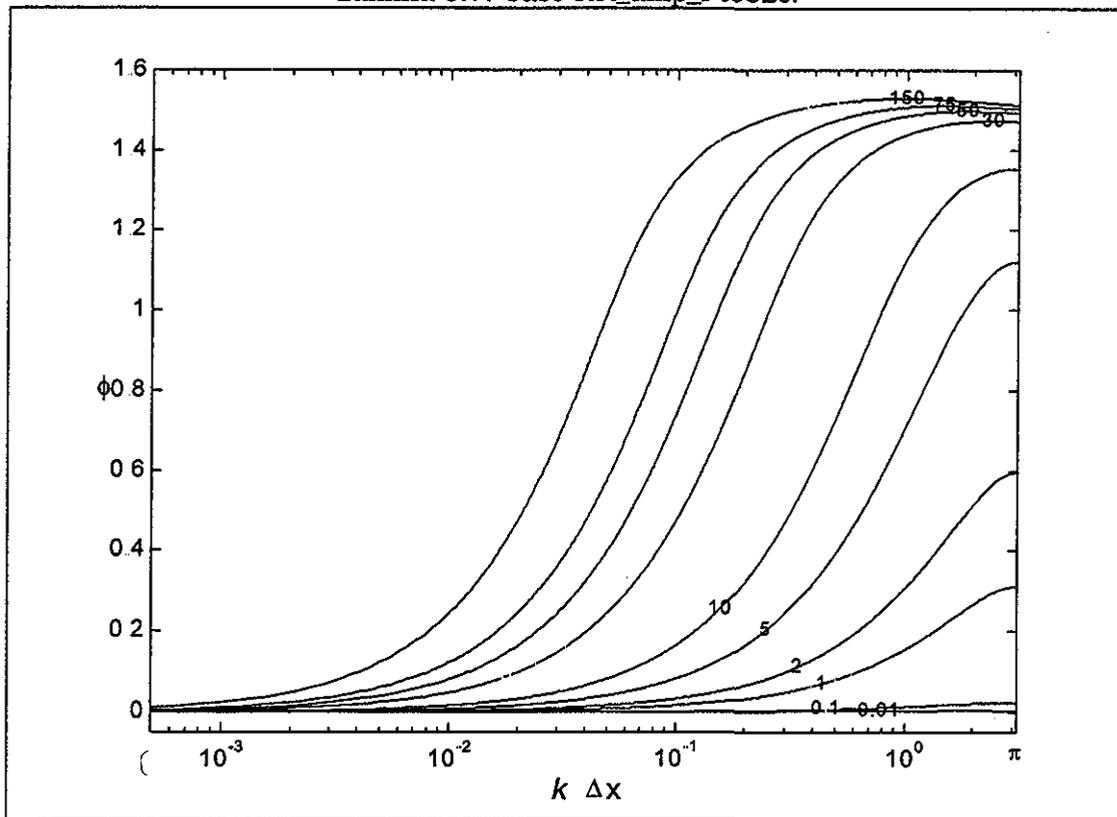


Lámina 6.8. Caso Ret_fas_Fs01Le.

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

UNIVERSIDAD DE GUATEMALA

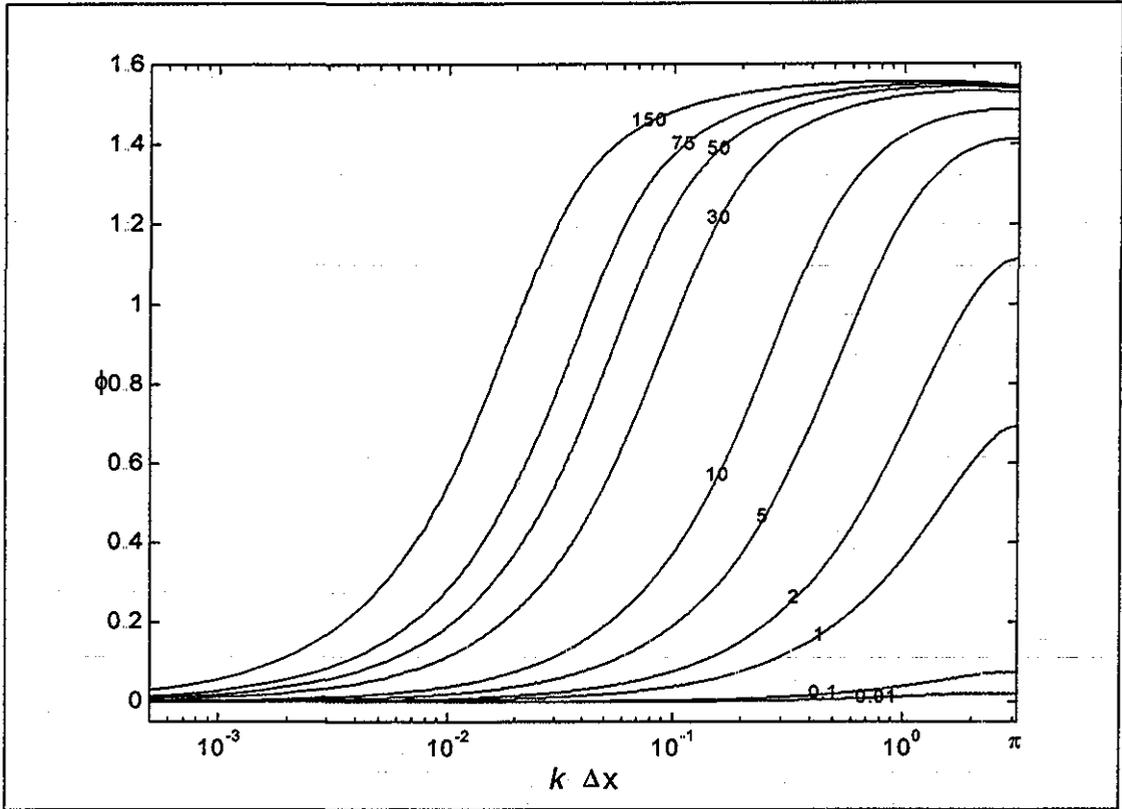


Lámina 6.9. Caso Ret_fas_Fs02Le.

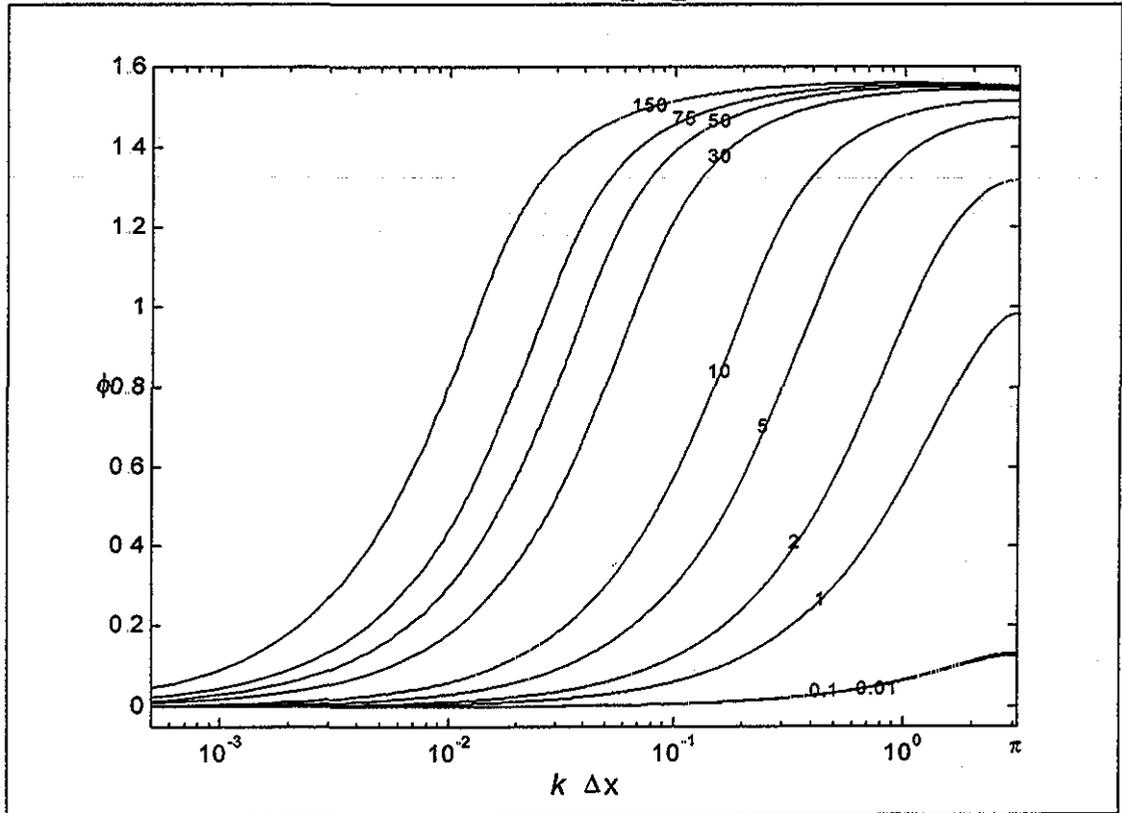


Lámina 6.10. Caso Ret_fas_Fs03Le.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

UNIVERSIDAD DE
CANTON

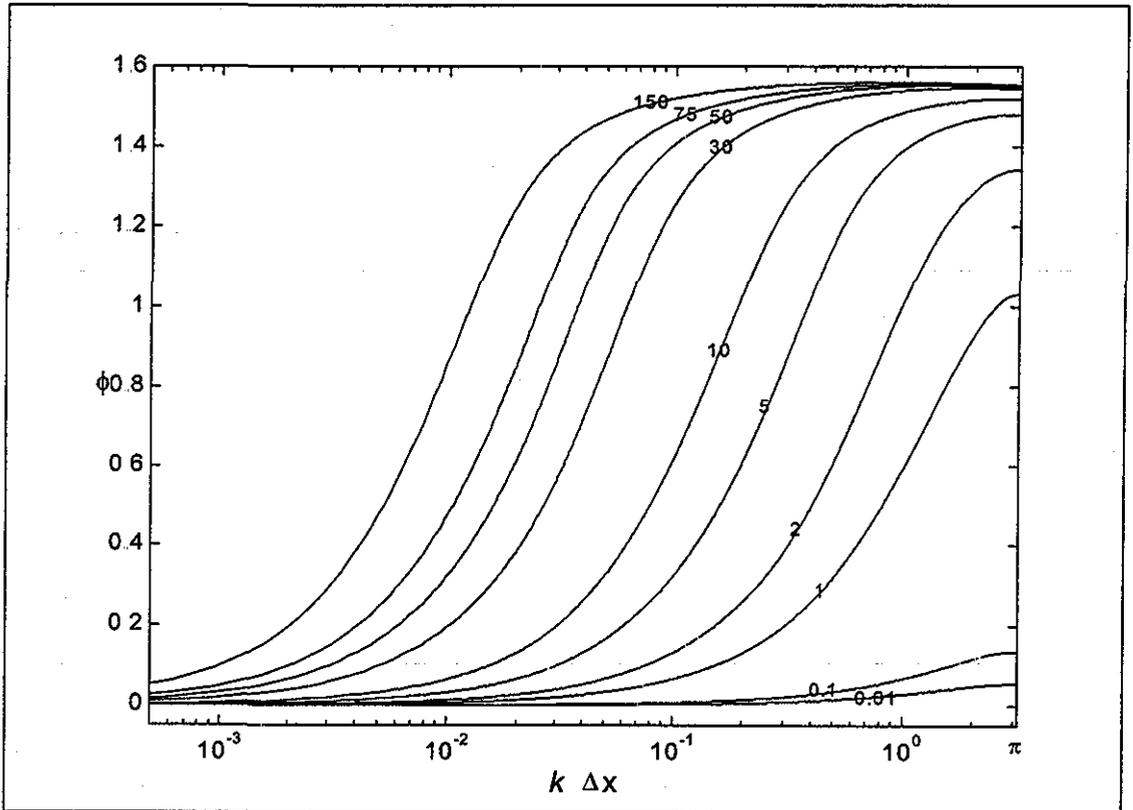


Lámina 6.11. Caso Ret_fas_Fs04Le.

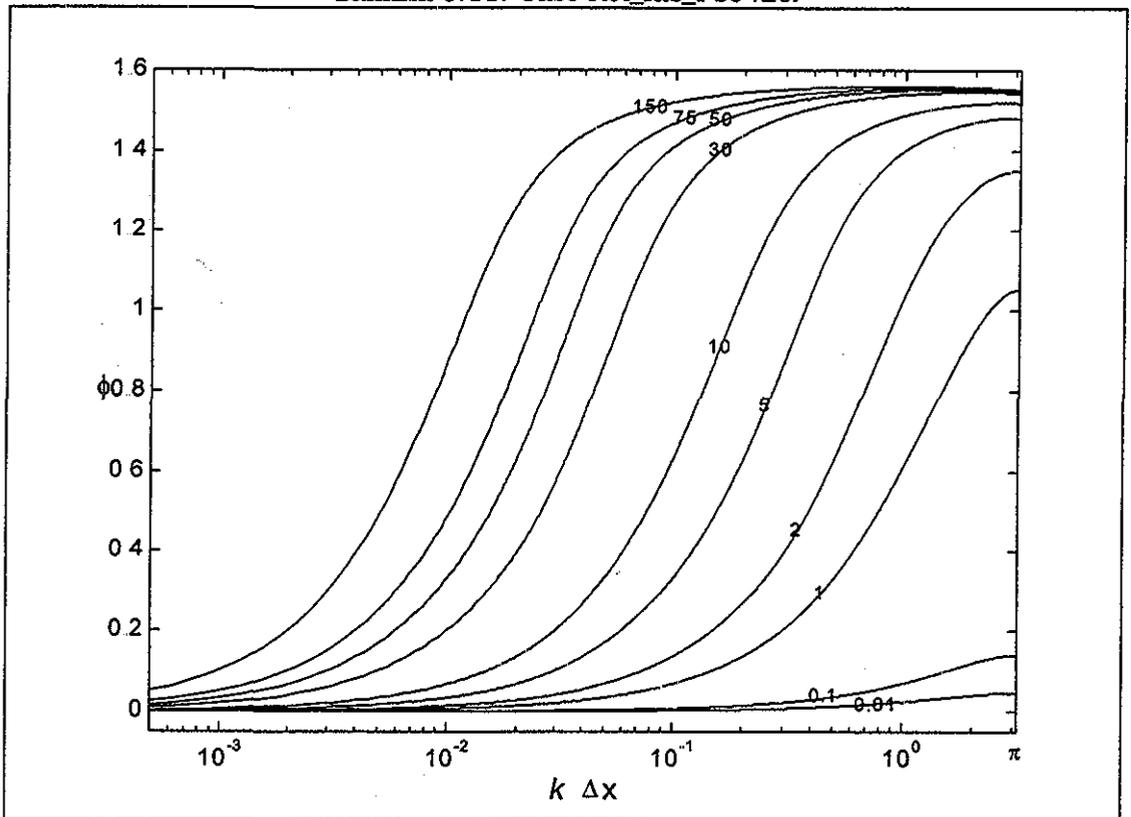


Lámina 6.12. Caso Ret_fas_Ft01Le.

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

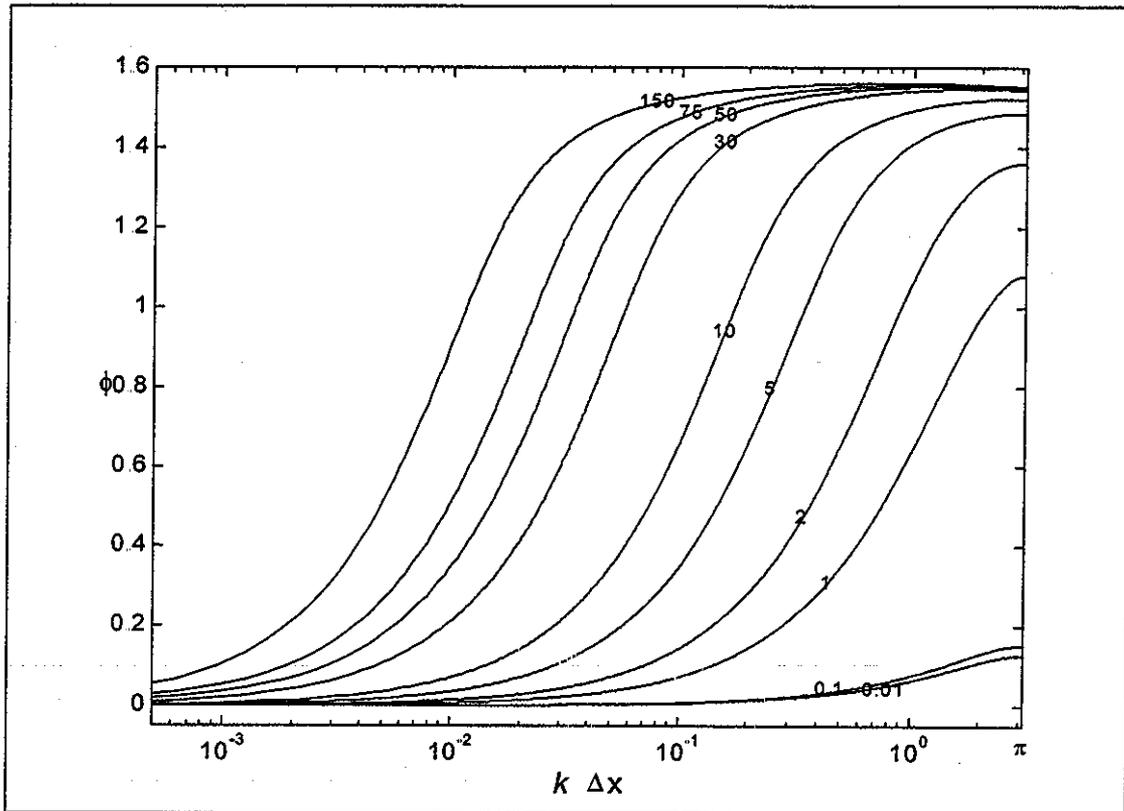


Lámina 6.13. Caso Ret_fas_Ft02Le.

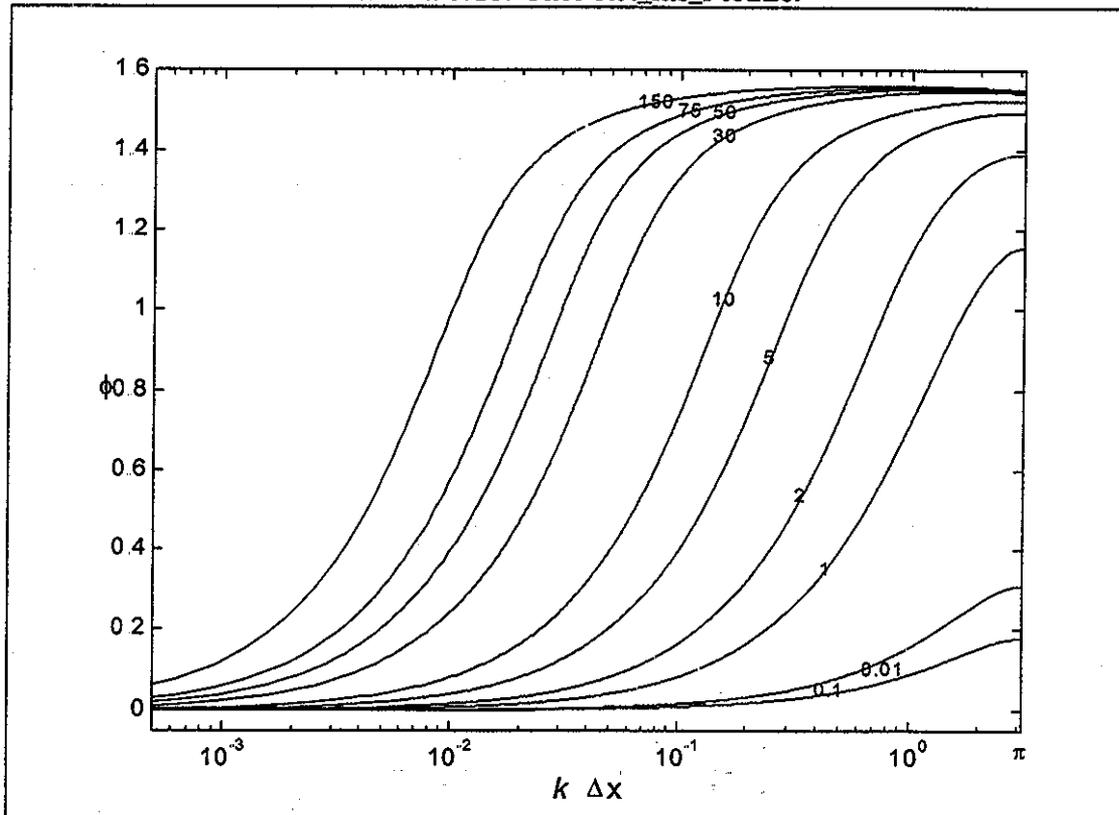


Lámina 6.14. Caso Ret_fas_Ft03Le.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN



6.6. Pruebas numéricas

6.6.1. Programación del esquema

Se parte de la propuesta de discretización de Leendertse para las ecuaciones de Saint-Venant no conservativas definidas en el subcapítulo 6.1.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(H_j^n, U_j^n; x, t) = & B(H_j^n; x_j, t_n) \frac{H_j^{n+1} - H_j^n}{\Delta t} + \\ & \frac{1}{\Delta x} \left[U_{j+1/2}^{n+1} A(H_{j+1/2}^n; x_{j+1}, t_n) - U_{j-1/2}^{n+1} A(H_{j-1/2}^n; x_{j-1}, t_n) \right] = 0 \end{aligned} \quad (6.6.1)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(H_j^n, U_j^n; x, t) = & \frac{U_{j+1/2}^{n+1} - U_{j+1/2}^n}{\Delta t} + U_{j+1/2}^{n+1} \left(\frac{U_{j+3/2}^n - U_{j-1/2}^n}{2\Delta x} \right) \\ & + g \frac{H_{j+1}^{n+1} - H_j^{n+1}}{2\Delta x} + \frac{\alpha K_s^{1/3} |U_{j+1/2}^n| U_{j+1/2}^{n+1}}{R(H_{j+1/2}^n; x_j, t_n)^{4/3}} - gS_b = 0 \end{aligned} \quad (6.6.2)$$

Para construir un sistema de ecuaciones sólo en términos de la elevaciones de la superficie libre se puede despejar la velocidad en $j+1/2$ de la ecuación de cantidad de movimiento (6.6.2):

$$U_{j+1/2}^{n+1} = \frac{1}{1 + \xi_{j+1/2}^n} \left[U_{j+1/2}^n - g\lambda (H_{j+1}^{n+1} - H_j^{n+1}) + gS_b \Delta t \right] \quad (6.6.3)$$

donde $\lambda = \Delta t / \Delta x$ y el término $\xi_{j+1/2}^b$ es:

$$\xi_{j+1/2}^n = \frac{\lambda}{2} (U_{j+3/2}^n - U_{j-1/2}^n) + \frac{\alpha K_s^{1/3} |U_{j+1/2}^n| \Delta t}{(R_{j+1/2}^n)^{4/3}} \quad (6.6.4)$$

y para el término de la velocidad en la posición $j-1/2$

$$U_{j-1/2}^{n+1} = \frac{1}{1 + \xi_{j-1/2}^n} \left[U_{j-1/2}^n - g\lambda (H_j^{n+1} - H_{j-1}^{n+1}) + gS_b \Delta t \right] \quad (6.6.5)$$

Sustituyendo las ecuaciones (6.6.3) y (6.6.5) en la ecuación de conservación de masa (6.6.1), se tiene



$$B_j^n (H_j^{n+1} - H_j^n) + \lambda \left\{ \frac{A_{j+1/2}^n}{1 + \xi_{j+1/2}^n} [U_{j+1/2}^{n+1} - g\lambda (H_{j+1}^{n+1} - H_j^{n+1}) + gS_b \Delta t] + \frac{A_{j-1/2}^n}{1 + \xi_{j-1/2}^n} [U_{j-1/2}^n - g\lambda (H_j^{n+1} - H_{j-1}^{n+1}) + gS_b \Delta t] \right\} = 0 \quad (6.6.6)$$

Reagrupando los términos para el intervalo $n+1$ en la ecuación anterior se obtiene un esquema en diferencias implícito aplicado a los nodos interiores. Entonces, la ecuación de conservación de masa modificada evalúa los efectos de variación del tirante, como aquí se observa:

$$\alpha_{j-1/2}^n H_{j-1}^{n+1} + \beta_j^n H_j^{n+1} + \alpha_{j+1/2}^n H_{j+1}^{n+1} = \gamma_j^n \quad (6.6.7)$$

donde los coeficientes $\alpha_{j-1/2}^n$, β_j^n , $\alpha_{j+1/2}^n$ y γ_j^n son:

$$\alpha_{j-1/2}^n = -\frac{g\lambda^2 A_{j-1/2}^n}{1 + \zeta_{j-1/2}^n} \quad (6.6.8)$$

$$\beta_j^n = B_j^n - \alpha_{j+1/2}^n - \alpha_{j-1/2}^n \quad (6.6.9)$$

$$\alpha_{j+1/2}^n = -\frac{g\lambda^2 A_{j+1/2}^n}{1 + \zeta_{j+1/2}^n} \quad (6.6.10)$$

$$\gamma_j^n = B_j^n H_j^n - \left[\frac{\alpha_{j-1/2}^n}{g\lambda} (U_{j-1/2}^n + gS_b \Delta t) - \frac{\alpha_{j+1/2}^n}{g\lambda} (U_{j+1/2}^n + gS_b \Delta t) \right] \quad (6.6.11)$$

Las condiciones de frontera sólo se aplicarán para la condición de flujo subcrítico, ya que este esquema es incondicionalmente inestable para flujo supercrítico, como se puede observar en los resultados de la graficación de los retratos de amplitud para este régimen (láminas 6.5-6.7). Por tanto, introduciendo la condición de frontera izquierda para el gasto definida en (2.3.56) en el esquema (6.6.7), con base en la propuesta de Aldama, *et al.*, 1981, se tiene

$$\beta_1^n H_1^{n+1} + \alpha_{1.5}^n H_2^{n+1} = \gamma_1^n \quad (6.6.12)$$

y los coeficientes $\alpha_{1.5}^n$, β_1^n y γ_1^n son

$$\alpha_{1.5}^n = -\frac{g\lambda^2 A_{1.5}^n}{1 + \zeta_{1.5}^n} \quad (6.6.13)$$

$$\beta_1^n = B_1^n - \alpha_{1.5}^n \quad (6.6.14)$$



El sistema matricial anterior se puede representar como $\mathbf{A} \cdot \underline{H}^{n+1} = \underline{\gamma}^n$, y la solución para el intervalo $n+1$ es $\underline{H}^{n+1} = \mathbf{A}^{-1} \underline{\gamma}^n$, con lo cual se obtienen los nuevos valores del tirante en $n+1$. Para actualizar los valores de la velocidad en las celdas alternas \underline{U}^{n+1} , se puede hacer uso de las ecuaciones (6.6.3) o (6.6.5).

Debido a que el esquema en diferencias (6.6.22) es lineal y no contiene términos por actualizar, se tiene como resultado que este esquema es muy eficiente en el uso de tiempo de cómputo para llegar a una solución. A fin de confirmar este comportamiento en el subcapítulo (6.6.2) se presentan una serie de pruebas numéricas.

6.6.2. Verificación numérica

Las pruebas numéricas del esquema de Leendertse aplicado a las ecuaciones de flujo a superficie libre de Saint-Venant no conservativas, se realizaron para una condición de flujo subcrítico, debido a que este esquema es incondicionalmente inestable para flujo supercrítico, como se puede observar en los retratos de amplitud, (láminas 6.5-6.7).

La secuencia de las pruebas numéricas para flujo subcrítico tiene como punto de partida la consideración de los datos generales de la sección transversal y de la topología del cauce, los cuales se definen a continuación:

Gasto (Q)	= 300 m ³ /s
Ancho de la base (b)	= 200 m
Talud (ak)	= 1:4
Tirante crítico (y_c)	= 0.6096 m
Rugosidad de Manning (n)	= 0.025
Longitud del Cauce (L)	= 25,000 m
Discretización espacial (Δx)	= 62.5 m

La condición inicial se determina por un flujo normalizado para una pendiente del fondo del canal, la cual se modificó para generar una serie de escenarios diferentes. Los datos generales de las características del flujo normalizado se pueden observar en la tabla 6.5. La condición de frontera es un hidrograma triangular (lámina 5.68). Para evaluar las condiciones de discretización espacial se consideró un $\Delta x = 62.5m$ y para la discretización temporal se tomaron en cuenta los siguientes valores del número de Courant $C_r = \{0.001, 0.01, 0.1, 1, 2, 5, 10, 30, 50, 75, 150\}$.



Nombre de la Prueba	Condición de flujo			
	Pendiente (S_b)	Tirante normal (y_n)	Número de Froude (F_r)	Número de Verdernikov (V_e)
Fs01Le	0.0001	2.1918	0.1443	0.0961
Fs02Le	0.001	1.1032	0.4087	0.2608
Fs03Le	0.005	0.6818	0.8448	0.5480
Fs04Le	0.007	0.6165	0.9832	0.6394

Tabla 6.5. Escenarios de condición inicial para las pruebas numéricas del esquema de Leendertse.

Los resultados de las pruebas numéricas de la simulación del transito de la avenida (lámina 5.68) para los diferentes escenarios de condición inicial (tabla 6.5) y diversos valores del número de Courant, donde se determinó la condición de estabilidad numérica, y se resumen en las tablas (6.6) –(6.9).

Prueba Fs01Le Número de Courant	Condición de estabilidad	
	Teórica	Numérica
	0.001	Sí
0.01	Sí	Sí
0.1	Sí	Sí
1	Sí	Sí
2	Sí	Sí
5	Sí	Sí
10	Sí	Sí
30	Sí	Sí
50	Sí	Sí
75	Sí	Sí
150	Sí	Sí

Tabla 6.6. Resultado de estabilidad de la prueba Fs01Le.

Prueba Fs02Le Número de Courant	Condición de estabilidad	
	Teórica	Numérica
	0.001	Sí
0.01	Sí	Sí
0.1	Sí	Sí
1	Sí	Sí
2	Sí	Sí
5	Sí	Sí
10	Sí	Sí
30	Sí	Sí
50	Sí	Sí
75	Sí	Sí
150	Sí	Sí

Tabla 6.7. Resultado de estabilidad de la prueba Fs02Le.



Prueba Fs03Le

Número de Courant	Condición de estabilidad	
	Teórica	Numérica
0.001	Sí	Sí
0.01	Sí	Sí
0.1	Sí	Sí
1	Sí	Sí
2	Sí	No
5	No	No
10	No	No
30	No	No
50	No	No
75	No	No
150	No	No

Tabla 6.8. Resultado de estabilidad de la prueba Fs03Le.

Prueba Fs04Le

Número de Courant	Condición de estabilidad	
	Teórica	Numérica
0.001	Sí	Sí
0.01	Sí	Sí
0.1	Sí	Sí
1	Sí	Sí
2	No	No
5	No	No
10	No	No
30	No	No
50	No	No
75	No	No
150	No	No

Tabla 6.9. Resultado de estabilidad de la prueba Fs04Le.

En las tablas anteriores se puede observar que predicción del método de propagación de perturbaciones aplicado al esquema de Leendertse indica con bastante exactitud los límites de estabilidad de este esquema, y la única predicción con fallo en las pruebas numéricas se tuvo en el escenario Fs03Le para un número de Courant $C_r = 2$.

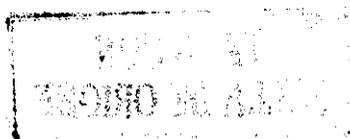


CAPÍTULO 7

FORMULACIÓN DE LA ECUACIÓN DE CONTINUIDAD GENERALIZADA DE ONDA (GWCE)

Las ecuaciones de flujo en aguas someras son comúnmente empleadas para determinar fluctuaciones de marea y patrones de corrientes marítimas. Estas ecuaciones son obtenidas al integrar las ecuaciones generales de flujo de Navier-Stokes en la dirección vertical (subcapítulo 2.2). Para obtener la solución de las ecuaciones de aguas someras en su forma primitiva, es práctica común el uso de esquemas numéricos de discretización que emplean la técnica de elemento finito en el espacio (Westerink *et al.*, 1987; Zienkiewicz y Taylor, 1989; Reddy, 1993) y de diferencias finitas en el tiempo. Sin embargo, los esquemas que se han construido basados en las técnicas antes mencionadas, producen soluciones que exhiben oscilaciones espurias de un nodo a otro (Kinnmark y Gray, 1985; Kinnmark, 1986).

Con el fin de eliminar dichas oscilaciones, diversos investigadores han propuesto hacer uso de términos de filtrado, teniendo en cuenta que al incluirlos debe cuidarse que la solución funcione adecuadamente, tanto para longitudes de onda grandes como pequeñas.





Una propuesta en este sentido fue la introducida por Lynch y Gray (1979), que consiste en el uso de la ecuación de continuidad generalizada de onda (*Generalized Wave Continuity Equation*, o GWCE), como una formulación de las ecuaciones de aguas someras, que ofrece un excelente control de las oscilaciones espurias y permite obtener soluciones aceptables en amplios rangos de longitud de onda (Ramírez, *et al.*, 1997; Aguilar y Escalante, 1998; Aldama y Aguilar, 1999).

La formulación de la GWCE tiene su origen en las ecuaciones de aguas someras o ecuaciones primitivas determinadas de la integración en la vertical de las ecuaciones de Navier-Stokes, bajo las siguientes consideraciones:

- El fluido se considera bien mezclado en la vertical y la aceleración vertical del fluido puede ser despreciada; esto implica que puede utilizar un aproximación hidrostática.
- El fluido es incompresible.
- El fluido es turbulento.
- Las ondas que se propagan en la superficie son largas (la longitud de onda es por lo menos 20 veces mayor que el tirante).

Las ecuaciones de aguas someras derivadas bajo estas consideraciones se presentan a continuación, y serán denominadas en lo sucesivo como las "ecuaciones primitivas" (Drolet y Gray, 1988). Difieren de las ecuaciones integradas en la vertical, desarrolladas en el subcapítulo 2.2, dado que incluyen el efecto de aceleración de Coriolis.

Ecuación de continuidad:

$$\mathcal{L}(\zeta, \mathbf{u}) = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \nabla \cdot (H \mathbf{u}) = 0 \quad (7.1)$$

Ecuación de cantidad de movimiento (en su forma no conservativa):

$$\mathcal{M}(\zeta, \mathbf{u}) = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \tau \mathbf{u} + f \mathbf{k} \times \mathbf{u} + g \nabla \zeta - \frac{\mathbf{A}_f}{H} = 0 \quad (7.2)$$

Ecuación de cantidad de movimiento (en su forma conservativa)

$$\mathcal{M}_c(\zeta, \mathbf{u}) = H \mathcal{M}(\zeta, \mathbf{u}) + \mathbf{u} \mathcal{L}(\zeta, \mathbf{u}) = 0 \quad (7.3)$$

donde ζ es la elevación relativa al nivel medio del mar; h el tirante (la distancia entre el nivel medio del agua y el fondo); $H = \zeta + h$ la altura de la columna del agua; \mathbf{u} el vector de velocidades promediadas en la vertical, en el plano horizontal; τ el parámetro de fricción; g la aceleración de la gravedad; \mathbf{k} el vector unitario en la dirección vertical y \mathbf{A}_f un vector que incluye los términos asociados con esfuerzos producidos por la acción del viento.



A través del uso de los operadores asociados con las ecuaciones primitivas (7.1-7.3), se puede definir la formulación GWCE. En particular, la ecuación de continuidad generalizada de onda se escribe como:

$$\mathcal{W}_c(\zeta, \mathbf{u}) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}(\zeta, \mathbf{u})}{\partial t} - \nabla \cdot \mathcal{M}_c(\zeta, \mathbf{u}) + G \mathcal{L}(\zeta, \mathbf{u}) = 0 \quad (7.4)$$

donde G es un parámetro numérico. En la formulación GWCE la ecuación (7.4) se resuelve en forma conjunta con la ecuación de cantidad de movimiento, ya sea en su forma conservativa, ecuación (7.3), o no conservativa, ecuación (7.2). Al observar la ecuación (7.4) es evidente que cuando $G \rightarrow \infty$, la GWCE tiende a la ecuación primitiva de conservación de masa.

Para validar el uso de la formulación GWCE es necesario primeramente evaluar si las soluciones que ésta produce coinciden con aquéllas correspondientes a la formulación primitiva, cuando ambas se aplican al sistema continuo. Dicha evaluación se efectuará sobre la base de la premisa de que el problema está bien planteado.

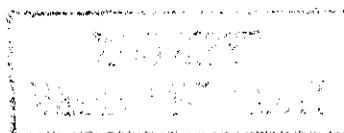
Una definición de que un problema esté bien planteado según Hadamard (Drolet y Gray, 1988) es que se debe cumplir que (lo cual se puede derivar de la definición que se manejó en el subcapítulo 3.4): (1) una solución existe; (2) la solución es única, y (3) la solución depende en forma continua de los datos complementarios (condiciones iniciales, de frontera y parámetros).

Dado que es más simple analizar las propiedades de propagación de la formulación GWCE aplicada a la versión unidimensional de las ecuaciones de aguas someras, se procederá a estudiar dicha formulación en el contexto de las ecuaciones de Saint-Venant. Entre otros resultados, esto permitirá determinar la condición de estabilidad de la formulación GWCE para flujo unidimensional a superficie libre, teniendo en mente que la formulación primitiva de las ecuaciones de Saint-Venant posee la condición de estabilidad: $|V_e| \leq 1$ (Skeels y Samuels, 1990; Ponce, 1993; Aldama y Aguilar, 1996).

Entonces, para construir la versión conservativa de la formulación GWCE para flujo unidimensional a superficie libre para un canal no prismático, se emplean las ecuaciones conservativas de Saint-Venant en su versión diferencial (definición 2.2)

Ecuación de conservación de masa:

$$\mathcal{L}(A, Q; x, t) = \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (2.3.52)$$





Ecuación de cantidad de movimiento:

$$\mathcal{M}(A, Q; x, t) = \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{Q^2}{A} \right] + gA \frac{\partial h(A; x, t)}{\partial x} + gAS_f(A, Q; x, t) = 0 \quad (2.3.53)$$

La formulación de la GWCE conservativa para el caso unidimensional se construye como:

$$\mathcal{W}(A, Q; x, t) = \frac{\partial \mathcal{L}(A, Q; x, t)}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} [\mathcal{M}(A, Q; x, t)] + G \mathcal{L}(A, Q; x, t) \quad (7.5)$$

Sustituyendo (2.3.52) y (2.3.53) en (7.5):

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(A, Q; x, t) = & \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{Q^2}{A} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left[gA \left(\frac{\partial h(A; x, t)}{\partial x} + S_f(A, Q; x, t) \right) \right] + \\ & G \left(\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (7.6)$$

7.1. Determinación de la propagación de perturbaciones del sistema continuo

7.1.1. Construcción del sistema perturbado

Las propiedades de propagación del sistema (2.3.52) y (7.6) se logran introduciendo una pequeña perturbación sobre las variables dependientes de la forma siguiente:

$$A = \bar{A} + a \quad ; \quad \|\bar{A}\| \gg \|a\| \quad (7.1.1)$$

$$Q = \bar{Q} + q \quad ; \quad \|\bar{Q}\| \gg \|q\| \quad (7.1.2)$$

donde \bar{A} y \bar{Q} son los valores de referencia, y a y q son pequeñas perturbaciones, que actúan sobre las variables dependientes. Sustituyendo (7.1.1) y (7.1.2) en (2.3.52) y (7.6), se obtiene el sistema de ecuaciones perturbadas de la formulación GWCE y cantidad de movimiento en su versión conservativa.

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 (\bar{A} + a)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{(\bar{Q} + q)^2}{\bar{A} + a} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left[gA \left\{ \frac{\partial h(\bar{A} + a; x, t)}{\partial x} + S_f(\bar{A} + a, \bar{Q} + q; x, t) \right\} \right] \\ & + G \left(\frac{\partial (\bar{A} + a)}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{Q} + q)}{\partial x} \right) = 0 \end{aligned} \quad (7.1.3)$$



$$\frac{\partial(\bar{Q}+q)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{(\bar{Q}+q)^2}{A+a} \right] + g(\bar{A}+a) \frac{\partial h(A;x,t)}{\partial x} + g(\bar{A}+a) S_f(\bar{A}+a, \bar{Q}+q; x, t) = 0 \quad (7.1.4)$$

Para desarrollar la ecuación de la formulación de la GWCE (7.1.3) se propone el realizar un análisis término a término:

Primer término:

$$\frac{\partial^2(\bar{A}+a)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial t^2} \quad (7.1.5)$$

Segundo término:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{(\bar{Q}+q)^2}{A+a} \right] \right\} = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[(\bar{Q}+q)^2 (\bar{A}+a)^{-1} \right] \right\} \quad (7.1.6)$$

En la relación anterior se tiene que $\|\bar{A}\| \gg \|a\|$. En este caso se puede aplicar la expansión binomial (4.1.8) para el término operado por la derivada. Entonces, la ecuación (7.1.6) se puede expresar de la forma siguiente:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{(\bar{Q}+q)^2}{A+a} \right] \right\} = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\bar{Q}^2}{\bar{A}} \right] + 2 \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\bar{Q}}{\bar{A}} q \right] - \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\bar{Q}^2}{\bar{A}^2} a \right] \right\} + O(\|a\| + \|q\|)^2 \quad (7.1.7)$$

Tercer término:

En este caso la variable que evalúa la elevación de la superficie libre del agua desde un nivel de referencia $h(A;x,t)$, tiene una dependencia paramétrica con respecto a la variable del área, y para su desarrollo se puede aplicar la expansión en serie de Fréchet-Taylor (4.1.35). Entonces, sustituyendo esta expansión en el tercer término de la formulación perturbada GWCE (7.1.3), y haciendo uso de (4.1.36) y (4.1.37), se tiene la siguiente expresión:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ g(\bar{A}+a) \frac{\partial h(\bar{A}+a; x, t)}{\partial x} \right\} = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ g\bar{A} \frac{\partial \bar{h}}{\partial x} + ga \frac{\partial \bar{h}}{\partial x} + g\bar{A} \frac{\partial \bar{h}_A}{\partial x} \right\} + O(\|a\|^2) \quad (7.1.8)$$

Cuarto término:

Debido a que el término de fricción $S_f(A, Q; x, t)$ mantiene una dependencia paramétrica con respecto al área (A) y el gasto (Q), para determinar la contribución de este término en la propagación de perturbaciones se puede aplicar una expansión en serie de Fréchet-Taylor, en las dos direcciones paramétricas, tal como se determinó en la ecuación (4.1.27)



Quinto término:

Dado que el término que delimita la influencia del término de filtrado es lineal su desarrollo es

$$G \left[\frac{\partial(\bar{A} + a)}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{Q} + q)}{\partial x} \right] = G \left(\frac{\partial \bar{A}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{Q}}{\partial x} \right) + G \left(\frac{\partial a}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} \right) \quad (7.1.9)$$

Para construir el desarrollo de la ecuación perturbada de la GWCE (7.6), sustituyendo los desarrollos (7.1.5), (7.1.7), (4.1.27) y (7.1.9), y agrupando los términos de orden superior al lineal, se tiene

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\bar{Q}^2}{\bar{A}} \right) + g \bar{A} \frac{\partial \bar{h}}{\partial x} + g \bar{A} \bar{S}_f \right] + G \left(\frac{\partial \bar{A}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{Q}}{\partial x} \right) + \\ & \frac{\partial^2 a}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left[2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\bar{Q}}{\bar{A}} q \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\bar{Q}^2}{\bar{A}^2} a \right) + g \bar{A} \frac{\partial}{\partial x} (\bar{h}_A a) + g a \frac{\partial \bar{h}}{\partial x} + \right. \\ & \left. g a \bar{S}_f + g \bar{A} (a \bar{S}_{f_A} + q \bar{S}_{f_Q}) \right] + G \left(\frac{\partial a}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} \right) + O[(\|a\| + \|q\|)^2] = 0 \end{aligned} \quad (7.1.10)$$

Cabe hacer notar que las variables \bar{S}_{f_A} y \bar{S}_{f_Q} definidas en las ecuaciones (4.1.25) y (4.1.26) dependen de la manera como se evalúa el término de fricción, y que en este caso se hace uso de la ecuación dimensionalmente homogénea de Chezy-Manning (2.3.45).

Debido a que la ecuación de perturbación de cantidad de movimiento (7.1.4) es similar a la ecuación de cantidad de movimiento (4.1.34), desarrollada en el subcapítulo (4.1.2), siguiendo un procedimiento similar para el desarrollo de esta ecuación y se tiene

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \bar{Q}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\bar{Q}^2}{\bar{A}} \right) + g \bar{A} \frac{\partial \bar{h}}{\partial x} + g \bar{A} \bar{S}_f + \frac{\partial q}{\partial t} + 2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\bar{Q}}{\bar{A}} q \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\bar{Q}^2}{\bar{A}^2} a \right) + \\ & g \bar{A} \frac{\partial}{\partial x} (\bar{h}_{AA}) + g a \frac{\partial \bar{h}}{\partial x} + g a \bar{S}_f + g \bar{A} a \bar{S}_{f_A} + g \bar{A} q \bar{S}_{f_Q} + O[(\|a\| + \|q\|)^2] = 0 \end{aligned} \quad (7.1.11)$$

Los primeros términos, que sólo contienen variables de referencias en las ecuaciones (7.1.10) y (7.1.11), satisfacen las ecuaciones de la GWCE y cantidad de movimiento en forma exacta. Al agruparse estos términos se define la condición de referencia según se enuncia a continuación:

$$\frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\bar{Q}^2}{\bar{A}} \right) + g \bar{A} \frac{\partial \bar{y}}{\partial x} + g \bar{A} (\bar{S}_f - S_b) \right] + G \left(\frac{\partial \bar{A}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{Q}}{\partial x} \right) = 0 \quad (7.1.12)$$



$$\frac{\partial \bar{Q}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\bar{Q}^2}{A} \right) + g \bar{A} \frac{\partial \bar{y}}{\partial x} + g \bar{A} (\bar{S}_f - S_b) = 0 \quad (7.1.13)$$

donde se ha considerado que $\bar{h} = z_b + \bar{y}$ y $S_b = -\partial z_b / \partial x$, siendo S_b la pendiente de la plantilla de fondo del canal.

Eliminando la condición de referencia en (7.1.10) y (7.1.11) se obtienen las ecuaciones perturbadas siguientes:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 a}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left[2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\bar{Q}}{A} q \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\bar{Q}^2}{A^2} a \right) + g \bar{A} \frac{\partial}{\partial x} (\bar{h}_{AA} a) + g a \frac{\partial \bar{h}}{\partial x} + \right. \\ \left. g a \bar{S}_f + g \bar{A} (a \bar{S}_{fA} + q \bar{S}_{f0}) \right] + G \left(\frac{\partial a}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} \right) + O \left[(\|a\| + \|q\|)^2 \right] = 0 \end{aligned} \quad (7.1.14)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial q}{\partial t} + 2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\bar{Q}}{A} q \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\bar{Q}^2}{A^2} a \right) + g \bar{A} \frac{\partial}{\partial x} (\bar{h}_{AA} a) + \\ g a \left(\frac{\partial \bar{y}}{\partial x} + \bar{S}_f - S_b + \bar{A} \bar{S}_{fA} \right) + g \bar{A} q \bar{S}_{f0} + O \left[(\|a\| + \|q\|)^2 \right] = 0 \end{aligned} \quad (7.1.15)$$

7.1.2. Análisis de localización

Para evaluar si cada uno de los términos de las ecuaciones de referencia (7.1.12) y (7.1.13) son de igual magnitud, se propone llevar a cabo un escalamiento, tomando un punto arbitrario (x_0, t_0) de referencia en el espacio de solución Ω , alejado de la frontera $\partial\Omega$. Debido a que las ecuaciones de referencia (7.1.12) y (7.1.13) tienen las mismas variables tanto independientes $(x \text{ y } t)$ como dependientes $(\bar{A}(x, t) \text{ y } \bar{Q}(x, t))$, con dependencia paramétrica $(y[\bar{A}(x, t); x, t] \text{ y } S_f[\bar{A}(x, t), \bar{Q}(x, t); x, t])$ y del término de variación de la pendiente del fondo del canal $(S_b(x))$, con respecto a las variables utilizadas para las ecuaciones de referencia (4.1.40 y 4.1.41). Por tanto, se puede hacer uso de los escalamientos aplicados a las ecuaciones (4.1.40 y 4.1.41) (subcapítulo 4.1.3) en el escalamiento de (7.1.12) y (7.1.13). Se hace uso entonces de las escalas para las variables independientes (4.1.51) y (4.1.52), así como para las variables dependientes y los términos que tienen dependencia paramétrica (4.1.54)-(4.1.58).

Por tanto, para escalar las ecuaciones (7.1.12) y (7.1.13) se sustituyen las escalas (4.1.51)-(4.1.58) de forma que



$$\frac{A_o}{\mathcal{E}^2} \frac{\partial^2 A^*}{\partial T^2} - \frac{1}{\mathcal{L}} \frac{\partial}{\partial X} \left[\frac{Q_o^2}{A_o \mathcal{L}} \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{Q^{*2}}{A^*} \right) + g \frac{A_o y_o}{\mathcal{L}} A^* \frac{\partial y^*}{\partial X} + g A_o A^* (S_{f_o} S_f^* - S_o S_b^*) \right] + \quad (7.1.16)$$

$$G \left(\frac{A_o}{\mathcal{E}} \frac{\partial A^*}{\partial T} + \frac{Q_o}{\mathcal{L}} \frac{\partial Q^*}{\partial X} \right) = 0$$

$$\frac{Q_o}{\mathcal{E}} \frac{\partial Q^*}{\partial T} + \frac{Q_o^2}{A_o \mathcal{L}} \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{Q^{*2}}{A^*} \right) + g \frac{A_o y_o}{\mathcal{L}} A^* \frac{\partial y^*}{\partial X} + g A_o A^* (S_{f_o} S_f^* - S_o S_b^*) = 0 \quad (7.1.17)$$

Reordenando las ecuaciones anteriores en función del primer término de cada una de ellas:

$$\frac{\partial^2 A^*}{\partial T^2} - \frac{\partial}{\partial X} \left[\frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{Q^{*2}}{A^*} \right) + g \frac{y_o}{U_o^2} A^* \frac{\partial y^*}{\partial X} + g \frac{\mathcal{L}}{U_o^2} A^* (S_{f_o} S_f^* - S_o S_b^*) \right] + \quad (7.1.18)$$

$$G \frac{\mathcal{L}}{U_o} \left(\frac{\partial A^*}{\partial T} + \frac{\partial Q^*}{\partial X} \right) = 0$$

$$\frac{\partial Q^*}{\partial T} + \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{Q^{*2}}{A^*} \right) + g \frac{y_o}{U_o^2} A^* \frac{\partial y^*}{\partial X} + g \frac{\mathcal{L}}{U_o^2} A^* (S_{f_o} S_f^* - S_o S_b^*) = 0 \quad (7.1.19)$$

De las expresiones anteriores se tiene que $g y_o / U_o^2 = F_r^{-2} = O(1)$, en el caso del término de fricción $g \mathcal{L} / U_o^2 S_{f_o} = O(1/\delta)$ (ecuación 4.1.63) y $g \mathcal{L} / U_o^2 S_o = O(1/\delta)$ (ecuación 4.1.65). Tomando en cuenta estos escalamientos en (7.1.18) y (7.1.19), se dice que

$$\frac{\partial^2 A^*}{\partial T^2} - \frac{\partial}{\partial X} \left[\frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{Q^{*2}}{A^*} \right) + g \frac{y_o}{U_o^2} A^* \frac{\partial y^*}{\partial X} + g \frac{\mathcal{L}}{U_o^2} A^* (S_{f_o} S_f^* - S_o S_b^*) \right] + \quad (7.1.20)$$

$O(1) \quad - \quad [\quad O(1) \quad \quad O(1) \quad \quad O(1/\delta) - O(1/\delta)]$

$$G \frac{\mathcal{L}}{U_o} \left(\frac{\partial A^*}{\partial T} + \frac{\partial Q^*}{\partial X} \right) = 0$$

$O(1) + O(1)$

$$\frac{\partial Q^*}{\partial T} + \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{Q^{*2}}{A^*} \right) + g \frac{y_o}{U_o^2} A^* \frac{\partial y^*}{\partial X} + g \frac{1}{\delta} (S_{f_o} - S_o) A^* S_f^* = 0 \quad (7.1.21)$$

$O(1) \quad O(1) \quad \quad O(1) \quad \quad O(1/\delta) - O(1/\delta)$

Recordando que en el subcapítulo (4.1.3) se demostró que para un flujo con tendencia a la normalización la diferencia $(S_{f_o} - S_o) = O(\delta)$, entonces



$g1/\delta(S_f - S_o) = O(1)$. Lo anterior indica que para las ecuaciones de referencia todos los términos tienen la misma magnitud.

Para el escalamiento de las ecuaciones perturbadas (7.1.14) y (7.1.15), tomando en cuenta las mismas características de separación de escalas (4.1.46)-(4.1.50) sobre un punto arbitrario (x_o, t_o) , para lo cual se considera las escalas de las variables dependientes de perturbación (4.1.70) y (4.1.71) y las relación entre las escalas lentas y rápidas (4.1.69) tiene la misma validez, se está en posibilidad de llevar a cabo el escalamiento de las ecuaciones perturbación (7.1.14) y (7.1.15). A pesar de esto, es necesario desarrollar el término convectivo de estas ecuaciones considerando

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\bar{Q}}{A} q \right) = \frac{2}{A} \frac{\partial \bar{Q}}{\partial x} \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{1}{A^2} \frac{\partial \bar{A}}{\partial x} \left(\frac{2\bar{Q}q}{A} \frac{\partial \bar{A}}{\partial x} - 2\bar{Q} \frac{\partial q}{\partial x} - 2q \frac{\partial \bar{Q}}{\partial x} \right) + \frac{q}{A} \frac{\partial^2 \bar{Q}}{\partial x^2} - \frac{\bar{Q}q}{A^2} \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial x^2} + \frac{\bar{Q}}{A} \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} \quad (7.1.22)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\bar{Q}^2}{A^2} a \right) = \frac{2}{A^2} \frac{\partial \bar{Q}}{\partial x} \left(\bar{Q} \frac{\partial a}{\partial x} + 2a \frac{\partial \bar{Q}}{\partial x} \right) + 2 \frac{\bar{Q}}{A^3} \frac{\partial \bar{A}}{\partial x} \left(3 \frac{\bar{Q}a}{A} \frac{\partial \bar{A}}{\partial x} - 2\bar{Q} \frac{\partial a}{\partial x} - 4a \frac{\partial \bar{Q}}{\partial x} \right) + 2 \frac{\bar{Q}a}{A^2} \frac{\partial^2 \bar{Q}}{\partial x^2} - 2 \frac{\bar{Q}^2 a}{A^3} \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial x^2} + \frac{\bar{Q}^2}{A^2} \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} \quad (7.1.23)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[g\bar{A} \frac{\partial}{\partial x} (\bar{h}_{AA}) \right] = g \frac{\partial \bar{A}}{\partial x} \left(a \frac{\partial \bar{h}_A}{\partial x} + h_A \frac{\partial a}{\partial x} \right) + 2g\bar{A} \frac{\partial \bar{h}_A}{\partial x} \frac{\partial a}{\partial x} + g\bar{A} \left(a \frac{\partial^2 \bar{h}_A}{\partial x^2} + h_A \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} \right) \quad (7.1.24)$$

Sustituyendo las ecuaciones (7.1.22)-(7.1.24) en la ecuación de la GWCE (7.1.14), y agrupando, se tiene

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 a}{\partial t^2} - \left(\frac{\bar{A}}{A} \frac{\partial q}{\partial x} - \bar{Q} \frac{\partial a}{\partial x} - 2a \frac{\partial \bar{Q}}{\partial x} - 2q \frac{\partial \bar{A}}{\partial x} \right) \left(\frac{2}{A^2} \frac{\partial \bar{Q}}{\partial x} - \frac{4\bar{Q}}{A^3} \frac{\partial \bar{A}}{\partial x} \right) - \\ & 2 \frac{\bar{Q}}{A^2} \left[\frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial x^2} \left(\frac{\bar{Q}}{A} a - q \right) - 3 \frac{\bar{Q}a}{A^2} \left(\frac{\partial \bar{A}}{\partial x} \right)^2 - \frac{\partial^2 \bar{Q}}{\partial x^2} a \right] - \frac{2\bar{Q}}{A} \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + \frac{\bar{Q}^2}{A^2} \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} - \\ & g a \left[\frac{\partial^2 \bar{y}}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x} (\bar{S}_f - S_b) \right] - g \frac{\partial a}{\partial x} \left(\frac{\partial \bar{y}}{\partial x} + \bar{S}_f - S_b \right) - \\ & g\bar{A} \left(a \frac{\partial^2 \bar{h}_A}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial \bar{h}_A}{\partial x} \frac{\partial a}{\partial x} + h_A \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} + \frac{\partial a}{\partial x} S_{fA} + \frac{\partial q}{\partial x} S_{f0} + a \frac{\partial \bar{S}_{fA}}{\partial x} + q \frac{\partial \bar{S}_{f0}}{\partial x} \right) - \\ & g \frac{\partial \bar{A}}{\partial x} \left(a \frac{\partial \bar{h}_A}{\partial x} + \bar{h}_A \frac{\partial a}{\partial x} + a \bar{S}_{fA} + q \bar{S}_{f0} \right) + G \left(\frac{\partial a}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} \right) + O \left[(\|a\| + \|q\|)^2 \right] = 0 \end{aligned} \quad (7.1.25)$$



Además, sustituyendo las ecuaciones (4.1.73) y (4.1.74) en la ecuación de cantidad de movimiento (7.1.13), y agrupando:

$$\begin{aligned} \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{2}{A} \left(q - \frac{\bar{Q}}{A} a \right) \left(\frac{\partial \bar{Q}}{\partial x} - \frac{\bar{Q}}{A} \frac{\partial \bar{A}}{\partial x} \right) + 2 \frac{\bar{Q}}{A} \frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\bar{Q}^2}{A^2} \frac{\partial a}{\partial x} + g \bar{A} \bar{h}_A \frac{\partial a}{\partial x} + \\ g a \left(\frac{\partial \bar{h}_A}{\partial x} + \frac{\partial \bar{y}}{\partial x} + \bar{S}_f - S_b + \bar{A} \bar{S}_{fA} \right) + g \bar{A} q \bar{S}_{f0} + O\left[(\|a\| + \|q\|)^2 \right] = 0 \end{aligned} \quad (7.1.26)$$

Entonces, para escalar la ecuación de perturbación de la formulación GWCE, se sustituyen las escalas (4.1.51)-(4.1.58), (4.1.66), (4.1.67), (4.1.70) y (4.1.71) en (7.1.25) y se presenta el desarrollo de la aplicación de estas escalas término a término:

Primer término:

$$\frac{\partial^2 a}{\partial t^2} = \frac{\varepsilon A_0}{\Lambda_t^2} \frac{\partial^2 a^*}{\partial \tau} \quad (7.1.27)$$

Segundo término:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\bar{A}}{A} \frac{\partial q}{\partial x} - \bar{Q} \frac{\partial a}{\partial x} - 2a \frac{\partial \bar{Q}}{\partial x} - 2q \frac{\partial \bar{A}}{\partial x} \right) \left(\frac{2}{A^2} \frac{\partial \bar{Q}}{\partial x} - \frac{4\bar{Q}}{A^3} \frac{\partial \bar{A}}{\partial x} \right) = \\ \frac{2Q_0^2}{A_0 \mathcal{L}^2} \left(A^* \frac{\partial q^*}{\partial \xi} - Q^* \frac{\partial a^*}{\partial \xi} - 2\varepsilon \left(a^* \frac{\partial Q^*}{\partial X} + q^* \frac{\partial A^*}{\partial X} \right) \right) \left(\frac{1}{A^{*2}} \frac{\partial Q^*}{\partial X} - \frac{2Q^*}{A^{*3}} \frac{\partial A^*}{\partial X} \right) \end{aligned} \quad (7.1.28)$$

Tercer término:

$$\begin{aligned} 2 \frac{\bar{Q}}{A^2} \left[\frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial x^2} \left(\frac{\bar{Q}}{A} a - q \right) - 3 \frac{\bar{Q} a}{A^2} \left(\frac{\partial \bar{A}}{\partial x} \right)^2 - \frac{\partial^2 \bar{Q}}{\partial x^2} a \right] = \\ \frac{2Q_0^2}{A_0 \mathcal{L}^2} \frac{\varepsilon}{A^{*2}} \left[\frac{\partial^2 A^*}{\partial X^2} \left(\frac{Q^*}{A^*} a^* - q^* \right) - 3 \frac{Q^* a^*}{A^{*2}} \left(\frac{\partial A^*}{\partial X} \right)^2 - \frac{\partial^2 Q^*}{\partial X^2} a^* \right] \end{aligned} \quad (7.1.29)$$

Cuarto término:

$$-\frac{2\bar{Q}}{A} \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + \frac{\bar{Q}^2}{A^2} \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} = \frac{2Q_0^2}{A_0} \frac{\varepsilon}{\Lambda_x^2} \left(-\frac{2Q^*}{A^*} \frac{\partial^2 q^*}{\partial \xi^2} + \frac{Q^{*2}}{A^{*2}} \frac{\partial^2 a^*}{\partial \xi^2} \right) \quad (7.1.30)$$

Quinto término:

$$g a \left[\frac{\partial^2 \bar{y}}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x} (\bar{S}_f - S_b) \right] = g A_0 \frac{\varepsilon}{\mathcal{L}} a^* \left[\frac{y_0}{\mathcal{L}} \frac{\partial^2 y^*}{\partial X^2} + S_{f0} \frac{\partial S_f^*}{\partial X} - S_0 \frac{\partial S_b^*}{\partial X} \right] \quad (7.1.31)$$

Sexto término:

$$g \frac{\partial a}{\partial x} \left(\frac{\partial \bar{y}}{\partial x} + \bar{S}_f - S_b \right) = g \frac{A_0 y_0 \varepsilon}{\mathcal{L} \Lambda_x} \frac{\partial a^*}{\partial \xi} \frac{\partial y^*}{\partial X} + g \frac{A_0 \varepsilon}{\Lambda_x} \frac{\partial a^*}{\partial \xi} (S_{f0} S_f^* - S_0 S_b^*) \quad (7.1.32)$$



Séptimo término:

$$g\bar{A}\left(a\frac{\partial^2\bar{h}_A}{\partial x^2}+2\frac{\partial\bar{h}_A}{\partial x}\frac{\partial a}{\partial x}+\bar{h}_A\frac{\partial^2 a}{\partial x^2}+\frac{\partial a}{\partial x}\bar{S}_{f_A}+\frac{\partial q}{\partial x}\bar{S}_{f_Q}+a\frac{\partial\bar{S}_{f_A}}{\partial x}+q\frac{\partial\bar{S}_{f_Q}}{\partial x}\right)=$$

$$gA_o h_o \frac{\varepsilon}{\Lambda_x^2} A^* \left(h_A^* \frac{\partial^2 a^*}{\partial \zeta^2} + 2\varepsilon \frac{\partial h_A^*}{\partial X} \frac{\partial a^*}{\partial \zeta} + \varepsilon^2 a^* \frac{\partial^2 h_A^*}{\partial X^2} \right) +$$

$$gA_o S_{f_o} \frac{\varepsilon}{\Lambda_x} A^* \left[\frac{\partial a^*}{\partial \zeta} S_{f_A}^* + \frac{\partial q^*}{\partial \zeta} S_{f_Q}^* + \varepsilon \left(a^* \frac{\partial S_{f_A}^*}{\partial X} + q^* \frac{\partial S_{f_Q}^*}{\partial X} \right) \right]$$
(7.1.33)

Octavo término:

$$g\frac{\partial\bar{A}}{\partial x}\left(a\frac{\partial\bar{h}_A}{\partial x}+\bar{h}_A\frac{\partial a}{\partial x}+a\bar{S}_{f_A}+q\bar{S}_{f_Q}\right)=g\frac{A_o h_o \varepsilon}{\mathcal{L} \Lambda_x} \frac{\partial A^*}{\partial X} \left(a^* \frac{\partial h_A^*}{\partial X} + h_A^* \frac{\partial a^*}{\partial \zeta} \right) +$$

$$g\frac{A_o S_{f_o} \varepsilon}{\mathcal{L}} \frac{\partial A^*}{\partial X} \left(a^* S_{f_A}^* + q^* S_{f_Q}^* \right)$$
(7.1.34)

Noveno término:

$$G\left(\frac{\partial a}{\partial t}+\frac{\partial q}{\partial x}\right)=G\frac{A_o \varepsilon}{\Lambda_t} \left(\frac{\partial a^*}{\partial \tau}+\frac{\partial q^*}{\partial \zeta}\right)$$
(7.1.35)

Escalando las ecuaciones (7.1.27)–(7.1.35) en relación con la ecuación (7.1.27), y definiendo el orden de cada término como se muestra a continuación:

Primer término:

$$\frac{\Lambda_t^2}{\varepsilon A_o} \frac{\varepsilon A_o}{\Lambda_t^2} \frac{\partial^2 a^*}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 a^*}{\partial \tau} = O(1)$$
(7.1.36)

Segundo término:

$$\frac{\Lambda_t^2}{\varepsilon A_o} \frac{2Q_o^2}{A_o \mathcal{L}^2} \left(A^* \frac{\partial q^*}{\partial \zeta} - Q^* \frac{\partial a^*}{\partial \zeta} - 2\varepsilon \left(a^* \frac{\partial Q^*}{\partial X} + q^* \frac{\partial A^*}{\partial X} \right) \right) \left(\frac{1}{A^{*2}} \frac{\partial Q^*}{\partial X} - \frac{2Q^*}{A^{*3}} \frac{\partial A^*}{\partial X} \right) =$$

$$2\varepsilon \left(A^* \frac{\partial q^*}{\partial \zeta} - Q^* \frac{\partial a^*}{\partial \zeta} - 2\varepsilon \left(a^* \frac{\partial Q^*}{\partial X} + q^* \frac{\partial A^*}{\partial X} \right) \right) \left(\frac{1}{A^{*2}} \frac{\partial Q^*}{\partial X} - \frac{2Q^*}{A^{*3}} \frac{\partial A^*}{\partial X} \right) =$$

$O(\varepsilon)$

Tercer término:

$$\frac{\Lambda_t^2}{\varepsilon A_o} \frac{2Q_o^2}{A_o} \frac{\varepsilon}{\mathcal{L}^2} \frac{Q^*}{A^{*2}} \left[\frac{\partial^2 A^*}{\partial X^2} \left(\frac{Q^*}{A^*} a^* - q^* \right) - 3 \frac{Q^* a^*}{A^{*2}} \left(\frac{\partial A^*}{\partial X} \right)^2 - \frac{\partial^2 Q^*}{\partial X^2} a^* \right] =$$

$$2\varepsilon^2 \frac{Q^*}{(A^{*2})} \left[\frac{\partial^2 A^*}{\partial X^2} \left(\frac{Q^*}{A^*} a^* - q^* \right) - 3 \frac{Q^* a^*}{A^{*2}} \left(\frac{\partial A^*}{\partial X} \right)^2 - \frac{\partial^2 Q^*}{\partial X^2} a^* \right] =$$

$O(\varepsilon^2)$

(7.1.38)



Cuarto término:

$$\frac{\Lambda_t^2}{\varepsilon A_o} \frac{2Q_o^2}{A_o} \frac{\varepsilon}{\Lambda_x^2} \left(-\frac{2Q^*}{A^*} \frac{\partial^2 q^*}{\partial \zeta^2} + \frac{Q^{*2}}{A^{*2}} \frac{\partial^2 a^*}{\partial \zeta^2} \right) = \left(-\frac{2Q^*}{A^*} \frac{\partial^2 q^*}{\partial \zeta^2} + \frac{Q^{*2}}{A^{*2}} \frac{\partial^2 a^*}{\partial \zeta^2} \right) \quad (7.1.39)$$

$$= O(1)$$

Quinto término:

$$\frac{\Lambda_t^2}{\varepsilon A_o} g A_o \frac{\varepsilon}{\mathcal{L}} a^* \left[\frac{y_o}{\mathcal{L}} \frac{\partial^2 y^*}{\partial X^2} + S_{f_o} \frac{\partial S_f^*}{\partial X} - S_o \frac{\partial S_b^*}{\partial X} \right] = g \frac{\varepsilon^2 y_o}{U_o^2} a^* \frac{\partial^2 y^*}{\partial X^2} + \quad (7.1.40)$$

$$g \frac{\varepsilon^2 \mathcal{L}}{U_o^2} a^* \left(S_{f_o} \frac{\partial S_f^*}{\partial X} - S_o \frac{\partial S_b^*}{\partial X} \right)$$

Aplicando el escalamiento para el término de fricción con (4.1.49) y (4.1.50) en la ecuación anterior y desarrollando

$$\frac{\Lambda_t^2}{\varepsilon A_o} g A_o \frac{\varepsilon}{\mathcal{L}} a^* \left[\frac{y_o}{\mathcal{L}} \frac{\partial^2 y^*}{\partial X^2} + S_{f_o} \frac{\partial S_f^*}{\partial X} - S_o \frac{\partial S_b^*}{\partial X} \right] = g \frac{\varepsilon^2 y_o}{U_o^2} a^* \frac{\partial^2 y^*}{\partial X^2} + \quad (7.1.41)$$

$$+ g \varepsilon \frac{\varepsilon}{\delta} a^* \left(S_{f_o} \frac{\partial S_f^*}{\partial X} - S_o \frac{\partial S_b^*}{\partial X} \right)$$

$$= O(\varepsilon)$$

Sexto término:

$$\frac{\Lambda_t^2}{\varepsilon A_o} \left[\frac{A_o y_o \varepsilon}{\mathcal{L} \Lambda_x} \frac{\partial a^*}{\partial \zeta} \frac{\partial y^*}{\partial X} + g \frac{A_o \varepsilon}{\Lambda_x} \frac{\partial a^*}{\partial \zeta} (S_{f_o} S_f^* - S_o S_b^*) \right] = g \frac{\varepsilon y_o}{U_o} \frac{\partial a^*}{\partial \zeta} \frac{\partial y^*}{\partial X} + \quad (7.1.42)$$

$$g \frac{\varepsilon}{\delta} \frac{\partial a^*}{\partial \zeta} (S_{f_o} S_f^* - S_o S_b^*)$$

$$= O(\varepsilon)$$



Séptimo término:

$$\begin{aligned}
 & g \frac{\Lambda_t^2}{\varepsilon A_o} \frac{A_o h_o \varepsilon}{\Lambda_x^2} A^* \left(h_A^* \frac{\partial^2 a^*}{\partial \zeta^2} + 2\varepsilon \frac{\partial h_A^*}{\partial X} \frac{\partial a^*}{\partial \zeta} + \varepsilon^2 a^* \frac{\partial^2 h_A^*}{\partial X^2} \right) + \\
 & g \frac{A_o S_{f_o} \varepsilon}{\Lambda_x} A^* \left[\frac{\partial a^*}{\partial \zeta} S_{f_A}^* + \frac{\partial q^*}{\partial \zeta} S_{f_o}^* + \varepsilon \left(a^* \frac{\partial S_{f_A}^*}{\partial X} + q^* \frac{\partial S_{f_o}^*}{\partial X} \right) \right] = \\
 & g \frac{h_o}{U_o^2} A^* \left(h_A^* \frac{\partial^2 a^*}{\partial \zeta^2} + 2\varepsilon \frac{\partial h_A^*}{\partial X} \frac{\partial a^*}{\partial \zeta} + \varepsilon^2 a^* \frac{\partial^2 h_A^*}{\partial X^2} \right) + \\
 & g \frac{\varepsilon}{\delta} S_{f_o} A^* \left[\frac{\partial a^*}{\partial \zeta} S_{f_A}^* + \frac{\partial q^*}{\partial \zeta} S_{f_o}^* + \varepsilon \left(a^* \frac{\partial S_{f_A}^*}{\partial X} + q^* \frac{\partial S_{f_o}^*}{\partial X} \right) \right] = \\
 & g \frac{h_o}{U_o^2} A^* h_A^* \frac{\partial^2 a^*}{\partial \zeta^2} + g \frac{\varepsilon}{\delta} S_{f_o} A^* \left(\frac{\partial a^*}{\partial \zeta} S_{f_A}^* + \frac{\partial q^*}{\partial \zeta} S_{f_o}^* \right) + O(\varepsilon)
 \end{aligned} \tag{7.1.43}$$

para definir el escalamiento en (7.1.42) y (7.1.43) nuevamente se aplicaron los escalamientos definidos para el término de fricción (4.1.49) y (4.1.50).

Octavo término:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\Lambda_t^2}{\varepsilon A_o} g \frac{A_o h_o \varepsilon}{\varepsilon \Lambda_x} \frac{\partial A^*}{\partial X} \left(a^* \frac{\partial h_A^*}{\partial X} + h_A^* \frac{\partial a^*}{\partial \zeta} \right) + \frac{\Lambda_t^2}{\varepsilon A_o} g \frac{A_o S_{f_o} \varepsilon}{\varepsilon \Lambda_x} \frac{\partial A^*}{\partial X} \left(a^* S_{f_A}^* + q^* S_{f_o}^* \right) = \\
 & g \varepsilon \frac{h_o}{U_o} \frac{\partial A^*}{\partial X} \left(a^* \frac{\partial h_A^*}{\partial X} + h_A^* \frac{\partial a^*}{\partial \zeta} \right) + g \frac{\varepsilon^2}{\delta} S_{f_o} \frac{\partial A^*}{\partial X} \left(a^* S_{f_A}^* + q^* S_{f_o}^* \right) = \\
 & O(\varepsilon)
 \end{aligned} \tag{7.1.44}$$

Noveno término:

$$\frac{\Lambda_t^2}{\varepsilon A_o} G \frac{A_o \varepsilon}{\Lambda_t} \left(\frac{\partial a^*}{\partial \tau} + \frac{\partial q^*}{\partial \zeta} \right) = G \frac{\Lambda_x}{U_o} \left(\frac{\partial a^*}{\partial \tau} + \frac{\partial q^*}{\partial \zeta} \right) \tag{7.1.45}$$

en este caso se considera que el término de supresión de las oscilaciones espurias de la formulación de GWCE es de una magnitud de $G = O(U_o/\Lambda_x)$. Entonces, la ecuación (7.1.45) es de un orden de $O(1)$.

Sustituyendo los escalamientos (7.1.36)-(7.1.39), (7.1.41)-(7.1.45) en la ecuación (7.1.25), y agrupando

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial^2 a^*}{\partial \tau^2} - \frac{2Q^*}{A^*} \frac{\partial^2 q^*}{\partial \zeta^2} + \frac{Q^*}{A^{*2}} \frac{\partial^2 a^*}{\partial \zeta^2} + g \frac{h_o}{U_o^2} A^* h_A^* \frac{\partial^2 a^*}{\partial \zeta^2} - \\
 & g \frac{\varepsilon}{\delta} S_{f_o} A^* \left(\frac{\partial a^*}{\partial \zeta} S_{f_A}^* + \frac{\partial q^*}{\partial \zeta} S_{f_o}^* \right) + G \frac{\Lambda_x}{U_o} \left(\frac{\partial a^*}{\partial \tau} + \frac{\partial q^*}{\partial \zeta} \right) + O(\varepsilon) = 0
 \end{aligned} \tag{7.1.46}$$

Por otra parte, sustituyendo las escalas (4.1.51)-(4.1.58), (4.1.70) y (4.1.71) en la ecuación de cantidad de movimiento (7.1.26):



$$\begin{aligned} & \frac{\varepsilon Q_o}{\Lambda_t} \frac{\partial q^*}{\partial \tau} + \frac{2\varepsilon Q_o^2}{\mathcal{L} A_o} \frac{1}{A^*} \left(q^* - \frac{Q^*}{A^*} a^* \right) \left(\frac{\partial Q^*}{\partial X} - \frac{Q^*}{A^*} \frac{\partial A^*}{\partial X} \right) + \frac{\varepsilon}{\Lambda_x} \frac{Q_o^2}{A_o} \left(2 \frac{Q^*}{A^*} \frac{\partial q^*}{\partial \zeta} - \frac{Q^{*2}}{A^{*2}} \frac{\partial a^*}{\partial \zeta} \right) + \\ & g \frac{\varepsilon A_o h_o}{\Lambda_x} A^* h_A^* \frac{\partial a^*}{\partial \zeta} + g \varepsilon A_o a^* \left(\frac{h_o}{\mathcal{L}} A^* \frac{\partial h_A^*}{\partial X} + \frac{y_o}{\mathcal{L}} \frac{\partial y^*}{\partial X} + S_{f_o} S_f^* - S_o S_b^* + S_{f_o} A^* S_{f_A}^* \right) + \quad (7.1.47) \\ & g \varepsilon A_o S_{f_o} g A^* q^* S_{f_o}^* + O(\varepsilon^2) = 0 \end{aligned}$$

Reordenando la ecuación anterior con respecto al primer término:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial q^*}{\partial \tau} + 2\varepsilon \frac{1}{A^*} \left(q^* - \frac{Q^*}{A^*} a^* \right) \left(\frac{\partial Q^*}{\partial X} - \frac{Q^*}{A^*} \frac{\partial A^*}{\partial X} \right) + \left(2 \frac{Q^*}{A^*} \frac{\partial q^*}{\partial \zeta} - \frac{Q^{*2}}{A^{*2}} \frac{\partial a^*}{\partial \zeta} \right) + \quad (7.1.48) \\ & g \frac{h_o}{U_o^2} A^* h_A^* \frac{\partial a^*}{\partial \zeta} + g \varepsilon \frac{h_o}{U_o^2} \left(A^* \frac{\partial h_A^*}{\partial X} + \frac{y_o}{h_o} \frac{\partial y^*}{\partial X} \right) - g \frac{\varepsilon \mathcal{L}}{U_o^2} S_o a^* S_b^* + \\ & g \frac{\varepsilon \mathcal{L}}{U_o^2} S_{f_o} \left[a^* (S_f^* + A^* S_{f_A}^*) + q^* A^* S_{f_o}^* \right] + O(\varepsilon) = 0 \end{aligned}$$

En la expresión anterior se evidencia que la magnitud de algunos términos se pueden evaluar como $y_o/h_o = O(1)$, $gh_o/U_o^2 = Fr^{-2} = O(1)$ y $(S_{f_o} - S_o) = O(\delta)$; por tanto, la ecuación (7.1.48) se puede escribir de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial q^*}{\partial \tau} + 2 \frac{Q^*}{A^*} \frac{\partial q^*}{\partial \zeta} - \frac{Q^{*2}}{A^{*2}} \frac{\partial a^*}{\partial \zeta} + g \frac{h_o}{U_o^2} A^* h_A^* \frac{\partial a^*}{\partial \zeta} + \quad (7.1.49) \\ & g \frac{\varepsilon}{\delta} S_{f_o} \left[a^* A^* S_{f_A}^* + q^* A^* S_{f_o}^* \right] + O(\varepsilon) = 0 \end{aligned}$$

Localización:

Tomando en cuenta la hipótesis de separación de escalas (4.1.46)–(4.1.50), y considerando que la variación entre las escalas de magnitud pequeña se puede evaluar por las definiciones (4.1.86) y (4.1.87), entonces, después de aplicar una expansión en serie de Taylor sobre el punto arbitrario de localización (x_o, t_o) , se puede concluir que las variables de referencia tienen un comportamiento del tipo $A^* = 1 + O(\varepsilon)$ y que las variables de perturbación $a^* = 1 + O(1)$. Esto indica que al aplicarse esta localización las variables de referencia tienen un comportamiento suave o de una magnitud casi estacionaria, y que las variables de perturbación tienen un comportamiento rápido o de una gran variedad. En forma coloquial se dice que las variables de referencia pueden ser localizadas y las variables de perturbación no pueden ser localizadas.



De tal modo, localizando el sistema de ecuaciones (7.1.46) y (7.1.48) se puede escribir como:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 a^*}{\partial \tau^2} - 2U_o \frac{\partial^2 q^*}{\partial \zeta^2} + U_o^2 \frac{\partial^2 a^*}{\partial \zeta^2} + g \frac{h_o}{U_o^2} A_o h_{A_o} \frac{\partial^2 a^*}{\partial \zeta^2} - \\ & g \frac{\varepsilon}{\delta} S_{f_o} A^* \left(\frac{\partial a^*}{\partial \zeta} S_{f_{A_o}} + \frac{\partial q^*}{\partial \zeta} S_{f_{Q_o}} \right) + G \frac{\Lambda_x}{U_o} \left(\frac{\partial a^*}{\partial \tau} + \frac{\partial q^*}{\partial \zeta} \right) + O(\varepsilon) = 0 \end{aligned} \quad (7.1.50)$$

$$\frac{\partial q^*}{\partial \tau} + 2U_o \frac{\partial q^*}{\partial \zeta} - U_o^2 \frac{\partial a^*}{\partial \zeta} + g \frac{h_o}{U_o^2} A_o h_{A_o} \frac{\partial a^*}{\partial \zeta} + g \frac{\varepsilon}{\delta} S_{f_o} A_o [a^* S_{f_{A_o}} + q^* S_{f_{Q_o}}] + O(\varepsilon) = 0 \quad (7.1.51)$$

Buscando una solución perturbatoria para las variables del sistema (7.1.50) y (7.1.51), del tipo (4.1.92) y (4.1.93), entonces la solución para la condición de $\varepsilon \rightarrow 0^+$, el sistema de ecuaciones (7.1.50) y (7.1.51) se puede expresar de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 a_o^*}{\partial \tau^2} - 2U_o \frac{\partial^2 q_o^*}{\partial \zeta^2} + U_o^2 \frac{\partial^2 a_o^*}{\partial \zeta^2} + g \frac{h_o}{U_o^2} A_o h_{A_o} \frac{\partial^2 a_o^*}{\partial \zeta^2} \\ & - g \frac{\varepsilon}{\delta} S_{f_o} A_o \left(\frac{\partial a_o^*}{\partial \zeta} S_{f_{A_o}} + \frac{\partial q_o^*}{\partial \zeta} S_{f_{Q_o}} \right) + G \frac{\Lambda_x}{U_o} \left(\frac{\partial a_o^*}{\partial \tau} + \frac{\partial q_o^*}{\partial \zeta} \right) = 0 \end{aligned} \quad (7.1.52)$$

$$\frac{\partial q_o^*}{\partial \tau} + 2U_o \frac{\partial q_o^*}{\partial \zeta} - U_o^2 \frac{\partial a_o^*}{\partial \zeta} + g \frac{h_o}{U_o^2} A_o h_{A_o} \frac{\partial a_o^*}{\partial \zeta} + g \frac{\varepsilon}{\delta} S_{f_o} A_o [a_o^* S_{f_{A_o}} + q_o^* S_{f_{Q_o}}] = 0 \quad (7.1.53)$$

Después de localizar el sistema de ecuaciones de perturbación dentro de un dominio de solución espacial $x \in [0, L]$, donde se definió el escalamiento de $\mathcal{L}/L = O(1)$, al momento de escalar para las variables de perturbación la variable de longitud para la escala pequeña se delimita en $\zeta = -x_o/\Lambda_x = -x_o/\varepsilon \mathcal{L}$ y $\zeta = (L - x_o)/\Lambda_x = (L - x_o)/\varepsilon \mathcal{L}$. Cuando se tiene la condición $\varepsilon \rightarrow 0^+$ el rango de variación de la escala longitudinal en el ámbito local es $\zeta \in (-\infty, \infty)$.

Finalmente, una vez aplicado el análisis de escalas y localización al sistema de ecuaciones (7.1.15) y (7.1.16), éste se ha logrado transformar de un problema de valor inicial no lineal con coeficientes variables a un problema de valor inicial puro, lineal de coeficientes constantes, cuya versión dimensional es:

$$\frac{\partial^2 a}{\partial t^2} - 2U_o \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + U_o^2 (1 - F_r^{-2}) \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} - F_1 \frac{\partial a}{\partial x} - F_2 \frac{\partial q}{\partial x} + G \left(\frac{\partial a}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} \right) = 0 \quad (7.1.54)$$

$$\left(\frac{\partial q}{\partial t} + 2U_o \frac{\partial q}{\partial x} - U_o^2 (1 - F_r^{-2}) \frac{\partial a}{\partial x} + F_1 a + F_1 q \right) = 0 \quad (7.1.55)$$



donde F_1 y F_2 son definidas por la ecuaciones (4.1.99) y (4.1.100) respectivamente.

7.1.3. Análisis de estabilidad

Una vez que se tiene un problema de valor inicial puro, lineal y de coeficientes constantes (ecuaciones 7.1.54 y 7.1.55), puede ser resuelto por medio del método de Fourier, que consiste en la aplicación de una expansión en serie de Fourier sobre las variables de perturbación, de forma que

$$a = \hat{a} e^{i(kx - \omega t)} \quad (7.1.56)$$

$$q = \hat{q} e^{i(kx - \omega t)} \quad (7.1.57)$$

donde k es el número de onda y ω la frecuencia. Sustituyendo las ecuaciones (7.1.56) y (7.1.57) en el sistema (7.1.53) y (7.1.54), y desarrollando:

$$e^{i(kx - \omega t)} \left[\hat{a} (-\omega^2 - k^2 U_o^2 (1 - F_r^{-2}) - ik F_1 - Gi\omega) + \hat{q} (2k^2 U_o - ikF_2 + Gik) \right] = 0 \quad (7.1.58)$$

$$e^{i(kx - \omega t)} \left[\hat{a} (-ikU_o^2 (1 - F_r^{-2}) + F_1) + \hat{q} (-i\omega + 2ikU_o + F_2) \right] = 0 \quad (7.1.59)$$

o, también:

$$e^{i(kx - \omega t)} \begin{bmatrix} \omega^2 + k^2 U_o^2 (1 - F_r^{-2}) + ik F_1 + Gi\omega & -2k^2 U_o + ikF_2 - Gik \\ kU_o^2 (1 - F_r^{-2}) + i F_1 & \omega - 2kU_o + i F_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7.1.60)$$

Igualando el determinante de la matriz de coeficientes matriz de coeficientes (7.1.60) a cero, se tiene:

$$\begin{aligned} & \left[\omega^2 + k^2 U_o^2 (1 - F_r^{-2}) + ik F_1 + Gi\omega \right] (\omega - 2kU_o + i F_2) - \\ & \left(kU_o^2 (1 - F_r^{-2}) + i F_1 \right) (-2k^2 U_o + ikF_2 - Gik) = 0 \end{aligned} \quad (7.1.61)$$

La relación de dispersión se obtiene al resolver la ecuación anterior para la frecuencia, de forma que

$$\omega = \begin{cases} kU_o - \frac{i F_2}{2} \pm \sqrt{k^2 U_o^2 F_r^{-2} - \frac{F_2^2}{4} - ik(U_o F_2 + F_1)} \\ -iG \end{cases} \quad (7.1.62)$$

Aplicando la condición de estabilidad $\omega_i \leq 0$ en la relación de dispersión, se tiene el siguiente criterio de estabilidad:



$$\omega_i = \begin{cases} -\frac{F_2}{2} \pm \text{Im} \left[\sqrt{k^2 U_o^2 F_r^{-2} - \frac{F_2^2}{4} - i k(U_o F_2 + F_1)} \right] \leq 0 \\ -G \leq 0 \end{cases} \quad (7.1.63)$$

Extrayendo la parte imaginaria que está dentro del radical de la ecuación (7.1.63) para las dos primeras raíces

$$-\frac{F_2}{2} \pm \text{sgn}[-k(U_o F_2 + F_1)] 2^{-1/2} \cdot \left\{ \left[\left(k^2 U_o^2 F_r^{-2} - \frac{F_2^2}{4} \right)^2 + k^2 (U_o F_2 + F_1)^2 \right]^{1/2} - k^2 U_o^2 F_r^{-2} + \frac{F_2^2}{4} \right\}^{1/2} \leq 0 \quad (7.1.64)$$

La condición más desfavorable de la inecuación anterior se tiene para $\text{sgn}[-k(U_o F_2 + F_1)] > 0$. Aplicando este criterio y desarrollando se tiene que

$$\left[\frac{U_o F_2 + F_1}{F_2 \sqrt{g D_o}} \right]^2 \leq 1 \quad (7.1.65)$$

La ecuación anterior es la condición límite de estabilidad del sistema de ecuaciones (7.1.54) y (7.1.55), para los dos primeras raíces. Por otra parte, si se sustituyen las ecuaciones (4.1.99) y (4.1.100) en (7.1.65), y desarrollando se obtiene:

$$|V_e| \leq 1 \quad (7.1.66)$$

que es el criterio de estabilidad para las dos primeras raíces de (7.1.63), y la condición de estabilidad para la tercera raíz, aplicando el criterio de estabilidad, indica que $G \geq 0$. Lo anterior indica que independientemente del valor que se le asigne al término numérico G , el sistema de ecuaciones de la formulación de la GWCE es incondicionalmente estable, y afirma que en el caso de asignar un valor muy grande a G el sistema permanece incondicionalmente estable para el mismo rango de la formulación primitiva. Como se comentó anteriormente, esto es una condición de estabilidad no sólo de las ecuaciones, sino del flujo mismo que se da con la aparición de las ondas rodantes (Ponce y Maisner, 1993; Aldama y Aguilar, 1996).

7.1.4. Evaluación de la conservación masa

El resultado que se obtuvo en el apartado (7.1.3) indica que la condición de estabilidad del sistema de ecuaciones para la formulación generalizada de onda GWCE, se tiene para las dos primeras raíces de la relación de dispersión



(7.1.63) con $|V_e| \leq 1$; sin embargo, la tercera raíz de la relación de dispersión no impone ninguna restricción que tenga relevancia a la condición de estabilidad límite. No obstante lo anterior, la experiencia computacional indica que para ciertas condiciones de simulación la formulación GWCE exhibe errores significativos de conservación de masa (Westerink, *et al.*, 1987; Chippada, *et al.*, 1997).

Entonces, para evaluar si la formulación GWCE satisface el principio de conservación de masa en primera instancia, se demostrará que la representación en modos de Fourier de la formulación primitiva de continuidad (4.1.104) y cantidad de movimiento (4.1.105), determinadas en el apartado (4.1.4), conservan el principio de conservación de masa. Entonces, sean

$$\mathcal{L}(a, q) = e^{i(kx - \omega t)}(-i\omega \hat{a} + ik\hat{q}) = 0 \quad (7.1.67)$$

$$\mathcal{M}(a, q) = e^{i(kx - \omega t)} \left[\hat{a}(-ikU_o^2(1 - F_r^{-2}) + F_1) + \hat{q}(-i\omega + 2ikU_o + F_2) \right] = 0 \quad (7.1.68)$$

Despejando la amplitud \hat{a} de la ecuación de conservación de masa primitiva (7.1.67), y sustituyéndola en (7.1.68), se tiene

$$\hat{a} = \frac{\hat{q}(\omega - 2kU_o + iF_1)}{kU_o^2(1 - F_r^{-2}) + iF_2} \quad (7.1.69)$$

Sustituyendo la ecuación (7.1.69) en (7.1.67)

$$\mathcal{L}(a, q) = e^{i(kx - \omega t)} \left(\frac{i\omega(\omega - 2kU_o + iF_1)}{kU_o^2(1 - F_r^{-2}) + iF_2} + ik \right) \hat{q} = 0 \quad (7.1.70)$$

Como la relación de dispersión para el sistema primitivo (4.1.108) tiene dos raíces, entonces la solución de la ecuación anterior se debe cumplir en forma independiente para la raíz que se tome. Así, la ecuación (7.1.70) se puede escribir de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(a, q) = e^{i(kx - \omega_1 t)} & \left(\frac{i\omega_1(\omega_1 - 2kU_o + iF_1)}{kU_o^2(1 - F_r^{-2}) + iF_2} + ik \right) \hat{q} \\ & + e^{i(kx - \omega_2 t)} \left(\frac{i\omega_2(\omega_2 - 2kU_o + iF_1)}{kU_o^2(1 - F_r^{-2}) + iF_2} + ik \right) \hat{q} = 0 \end{aligned} \quad (7.1.71)$$

Sustituyendo la relación de dispersión del sistema primitivo (4.1.108) en la ecuación (7.1.71), y desarrollando:

$$\mathcal{L}(a, q) = e^{i(kx - \omega t)}(0)\hat{q} + e^{i(kx - \omega t)}(0)\hat{q} = 0 \quad (7.1.72)$$

El resultado anterior indica que el principio de conservación de masa se satisface en la formulación primitiva.



Para comprobar si el principio de conservación de masa se satisface en la formulación de la GWCE, y recordando que la relación de dispersión de la GWCE tiene tres raíces, la ecuación (7.1.71) se debe escribir como:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(a, q) = & e^{i(kx - \omega_1 t)} \left(\frac{i\omega_1(\omega_1 - 2kU_o + iF_1)}{kU_o^2(1 - F_r^{-2}) + iF_2} + ik \right) \hat{q} + \\ & e^{i(kx - \omega_2 t)} \left(\frac{i\omega_2(\omega_2 - 2kU_o + iF_1)}{kU_o^2(1 - F_r^{-2}) + iF_2} + ik \right) \hat{q} + \\ & e^{i(kx - \omega_3 t)} \left(\frac{i\omega_3(\omega_3 - 2kU_o + iF_1)}{kU_o^2(1 - F_r^{-2}) + iF_2} + ik \right) \hat{q} \end{aligned} \quad (7.1.73)$$

Sustituyendo la relación de dispersión de la formulación de la GWCE (7.1.62) en (7.1.73), y desarrollando, se tiene:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(a, q) = & e^{i(kx - \omega_1 t)} (0) \hat{q} + e^{i(kx - \omega_2 t)} (0) \hat{q} \\ & + e^{i(kx - \omega_3 t)} \left(\frac{-iG^2 - (2kU_o - iF_1)G}{kU_o^2(1 - F_r^{-2}) + iF_2} + ik \right) \hat{q} \neq 0 \end{aligned} \quad (7.1.74)$$

El resultado que se obtiene en la ecuación (7.1.74) demuestra que el principio de conservación de masa en la formulación de la GWCE se cumple para las dos primeras raíces, pero en el caso de la tercera raíz no se cumple cuando G es finito.

Para conocer cómo puede influir el parámetro numérico G en la aplicación de la formulación de la GWCE, se pueden analizar los siguientes casos:

Si $G = 0$

$$\mathcal{L}(a, q) = e^{ikx} (ik) \hat{q} \neq 0 \quad (7.1.75)$$

Si $G \rightarrow \infty$

$$\mathcal{L}(a, q) = (0) \hat{q} = 0 \quad (7.1.76)$$

se tiene la formulación primitiva y, por tanto, se mantiene el principio de conservación de masa.

Si $k = 0$

$$\mathcal{L}(a, q) = -G e^{-Gt} \left(\frac{G - F_1}{gS_{f_o} - F_2} \right) \hat{q} \neq 0 \quad (7.1.77)$$

Si $k \rightarrow \infty$

$$\mathcal{L}(a, q) = (+\infty) \hat{q} \neq 0 \quad (7.1.78)$$



Lo anterior indica que para que se mantenga el principio de conservación de masa en la formulación GWCE, sólo se cumple para un valor no muy grande de G , que es para valores del número de onda grande, y para $G \rightarrow \infty$; pero esta condición anula el efecto de introducir un término de filtrado, que es la esencia de la necesidad de crear la formulación GWCE (Aldama y Aguilar, 1999). En conclusión, para valores arbitrarios de G , la formulación GWCE no satisface el principio de conservación de masa.

7.2. Determinación de la propagación de perturbaciones en elemento finito

Es común resolver la formulación de aguas someras de la GWCE mediante el uso de un esquema de discretización empleando la técnica de elemento finito (Kinnmark, 1986; Luetlich, *et al.*, 1992); el rango de aplicación de este esquema se ha determinado para una condición en la cual los términos convectivos son despreciados (Kinnmark, 1986). Entonces, para ampliar los criterios de estabilidad y convergencia numérica necesarios para solucionar la formulación GWCE, se propone en esta parte realizar un estudio de propagación de perturbaciones considerando todos los términos de la formulación, para una condición de flujo unidimensional.

7.2.1. Construcción de la forma residual pesada

Para desarrollar la forma residual pesada de Galerkin, para la formulación (7.6) y la ecuación de conservación de masa (2.3.53), se utilizan las funciones de ponderación δu , y espacialmente integradas sobre el dominio $\Omega = \Omega(x, t)$, considerando que la integración espacial se representa por el operador del producto interno, como se muestra a continuación:

$$\langle \bullet, \delta u \rangle_{\Omega} = \int_{\Omega} \bullet \delta u \, d\Omega \quad (7.2.1)$$

Entonces, la construcción de la forma residual pesada para la formulación GWCE (7.6) es

$$\left\langle \frac{\partial^2 A}{\partial t^2}, \delta u \right\rangle_{\Omega} + \left\langle G \frac{\partial A}{\partial t}, \delta u \right\rangle_{\Omega} - \left\langle \frac{\partial \xi(A, Q; x, t)}{\partial x}, \delta u \right\rangle_{\Omega} = 0 \quad (7.2.2)$$

donde la variable ξ agrupa los términos operados por la derivada espacial en (7.6), de forma que



$$\xi(A, Q; x, t) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{A} \right) + gA \left(\frac{\partial h(A; x, t)}{\partial x} + S_f(A, Q; x, t) \right) - GQ \quad (7.2.3)$$

y la forma residual pesada para la ecuación de cantidad de movimiento (2.3.53)

$$\left\langle \frac{\partial Q}{\partial t}, \delta u \right\rangle_{\Omega} + \left\langle \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{A} \right), \delta u \right\rangle_{\Omega} + \left\langle gA \frac{\partial h(A; x, t)}{\partial x}, \delta u \right\rangle_{\Omega} + \left\langle gAS_f(A, Q; x, t), \delta u \right\rangle_{\Omega} = 0 \quad (7.2.4)$$

Para tener los mismos requisitos de continuidad espacial dentro del sistema de ecuaciones (7.2.2) y (7.2.3), se aplicará una integración por partes al tercer término de la ecuación de la formulación de la GWCE (7.2.2), de forma que

$$\left\langle \frac{\partial^2 A}{\partial t^2}, \delta u \right\rangle_{\Omega} + \left\langle G \frac{\partial A}{\partial t}, \delta u \right\rangle_{\Omega} + \left\langle \xi(A, Q; x, t), \frac{\partial \delta u}{\partial x} \right\rangle_{\Omega} - [\xi(A, Q; x, t), \delta u]_{\Gamma} = 0 \quad (7.2.5)$$

En la ecuación (7.2.5) se introducen las condiciones de frontera natural (ecuaciones 2.3.48 o 2.3.50) y esencial (ecuaciones 2.3.49 o 2.3.51), dependiendo de la condición de flujo que se maneje. Entonces, para evaluar la condición de frontera natural, se puede hacer uso de la ecuación de cantidad de movimiento (2.3.53) de forma que

$$\xi(A, Q; x, t) = -\frac{\partial Q}{\partial t} - GQ \quad (7.2.6)$$

Considerando la condición de frontera natural (2.3.48) o (2.3.50) en (7.2.5), la formulación residual pesada para la GWCE se puede escribir como

$$\left\langle \frac{\partial^2 A}{\partial t^2}, \delta u \right\rangle_{\Omega} + \left\langle G \frac{\partial A}{\partial t}, \delta u \right\rangle_{\Omega} + \left\langle \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{A} \right) + gA \left(\frac{\partial h}{\partial x} + S_f \right) - GQ \right], \frac{\partial \delta u}{\partial x} \right\rangle_{\Omega} - \left[\frac{df(t)}{dt} + Gf(t), \delta u \right]_{\Gamma_N} = 0 \quad (7.2.7)$$

En esta ecuación se puede hacer notar que la condición de frontera natural es diferente de cero solamente en la frontera donde se especifique entrada o salida de flujo (Γ_N) (Luettich, *et al.*, 1992).

7.2.2. Discretización espacial de Galerkin

Para la discretización espacial se requiere que las funciones de interpolación tengan al menos una continuidad funcional C^0 , en los casos de las variables dependientes $A(x, t)$ y $Q(x, t)$, con dependencia paramétrica $h(A; x, t)$ y $S_f(A, Q; x, t)$. Estas funciones de interpolación serán aproximadas sobre cada



elemento (l) en que se subdivide el dominio Ω . Además, tienen la particular de tener un valor nulo en cualquier otro lugar. Por tanto la variable dependiente de área $A(x, t)$ se puede evaluar de la forma siguiente:

$$A \cong \sum_{l=1}^{\#el} \hat{A}^{(l)} = \sum_{l=1}^{\#el} \underline{\phi}^{(l)} \underline{A}^{(l)} = \sum_{l=1}^{\#el} \left[\phi_1^{(l)} \phi_2^{(l)} \dots \right] \begin{bmatrix} A_1^{(l)} \\ A_2^{(l)} \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (7.2.8)$$

donde $\underline{\phi}^{(l)}$ es un vector que contiene las funciones de interpolación, siendo cero fuera del elemento (l) y $\underline{A}^{(l)}$ es un vector que contiene los datos elementales conocidos para cada elemento (l). En esta parte del documento el vector se representa con una línea de subrayado, el motivo de utilizar esta notación, se debe a que el procesador de texto no tiene la capacidad de generar los símbolos griegos en negritas, como fue utilizado para representar los vectores desde el inicio.

Para evaluar la variable dependiente de gasto $Q(x, t)$ y las que tienen dependencia paramétrica, se proponen las siguientes funciones de interpolación

$$Q \cong \sum_{l=1}^{\#el} \hat{Q}^{(l)} = \sum_{l=1}^{\#el} \underline{\phi}^{(l)} \underline{Q}^{(l)} \quad (7.2.9)$$

$$\begin{aligned} h(A; x, t) &\cong \sum_{l=1}^{\#el} h(\hat{A}^{(l)}; x, t) \\ &= \sum_{l=1}^{\#el} \underline{\phi}^{(l)} h(\underline{A}^{(l)}; x, t) \\ &\cong \sum_{l=1}^{\#el} \underline{\phi}^{(l)} \underline{h}^{(l)} \end{aligned} \quad (7.2.10)$$

$$\begin{aligned} S_f(A, Q; x, t) &\cong \sum_{l=1}^{\#el} S_f(\hat{A}^{(l)}, \hat{Q}^{(l)}; x, t) \\ &= \sum_{l=1}^{\#el} \underline{\phi}^{(l)} S_f(\underline{A}^{(l)}, \underline{Q}^{(l)}; x, t) \\ &\cong \sum_{l=1}^{\#el} \underline{\phi}^{(l)} \underline{S}_f^{(l)} \end{aligned} \quad (7.2.11)$$



$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{A} \right) &\cong \sum_{l=1}^{\#el} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\hat{Q}^2}{\hat{A}} \right)^{(l)} \\ &= \sum_{l=1}^{\#el} \frac{\partial \phi^{(l)}}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{A} \right)^{(l)} \end{aligned} \quad (7.2.12)$$

Utilizando la formulación de Galerkin (Reddy, 1993) para la evaluación de la función de interpolación, entonces

$$\begin{aligned} \delta u &\cong \sum_{l=1}^{\#el} \hat{\delta u}^{(l)} \\ &= \sum_{l=1}^{\#el} \phi^{(l)} \delta u^{(l)} \end{aligned} \quad (7.2.13)$$

Sustituyendo las funciones de interpolación (7.2.8)-(7.2.13) en la formulación residual pesada de la GWCE (7.2.7)

$$\begin{aligned} &\left\langle \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\sum_{l=1}^{\#el} \phi^{(l)} \underline{A}^{(l)} \right), \sum_{l=1}^{\#el} \phi^{(l)} \delta u^{(l)} \right\rangle_{\Omega} + \left\langle G \frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_{l=1}^{\#el} \phi^{(l)} \underline{A}^{(l)} \right), \sum_{l=1}^{\#el} \phi^{(l)} \delta u^{(l)} \right\rangle_{\Omega} + \\ &\left\langle \sum_{l=1}^{\#el} \frac{\partial \phi^{(l)}}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{A} \right)^{(l)}, \frac{\partial}{\partial x} \left(\sum_{l=1}^{\#el} \phi^{(l)} \delta u^{(l)} \right) \right\rangle_{\Omega} + \\ &\left\langle g \sum_{l=1}^{\#el} \left(\frac{\partial \phi^{(l)}}{\partial x} \underline{h}^{(l)} \right) \sum_{l=1}^{\#el} \phi^{(l)} \underline{A}^{(l)}, \frac{\partial}{\partial x} \left(\sum_{l=1}^{\#el} \phi^{(l)} \delta u^{(l)} \right) \right\rangle_{\Omega} + \\ &\left\langle g \sum_{l=1}^{\#el} \phi^{(l)} \underline{S}_f^{(l)} \sum_{l=1}^{\#el} \phi^{(l)} \underline{A}^{(l)}, \frac{\partial}{\partial x} \left(\sum_{l=1}^{\#el} \phi^{(l)} \delta u^{(l)} \right) \right\rangle_{\Omega} - \\ &\left\langle G \sum_{l=1}^{\#el} \phi^{(l)} \underline{Q}^{(l)}, \frac{\partial}{\partial x} \left(\sum_{l=1}^{\#el} \phi^{(l)} \delta u^{(l)} \right) \right\rangle_{\Omega} + \left[\left(\frac{df}{dt} + G f \right) \sum_{l=1}^{\#el} \phi^{(l)} \delta u^{(l)} \right]_{\Gamma_N} = 0 \end{aligned} \quad (7.2.14)$$

Y realizando la misma operación en la formulación residual pesada de ecuación de cantidad de movimiento (7.2.4)

$$\begin{aligned} &\left\langle \frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_{l=1}^{\#el} \phi^{(l)} \underline{Q}^{(l)} \right), \sum_{l=1}^{\#el} \phi^{(l)} \delta u^{(l)} \right\rangle_{\Omega} + \left\langle \sum_{l=1}^{\#el} \frac{\partial \phi^{(l)}}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{A} \right)^{(l)}, \sum_{l=1}^{\#el} \phi^{(l)} \delta u^{(l)} \right\rangle_{\Omega} + \\ &\left\langle g \sum_{l=1}^{\#el} \frac{\partial \phi^{(l)}}{\partial x} \underline{h}^{(l)} \sum_{l=1}^{\#el} \phi^{(l)} \underline{A}^{(l)}, \sum_{l=1}^{\#el} \phi^{(l)} \delta u^{(l)} \right\rangle_{\Omega} + \\ &\left\langle g \sum_{l=1}^{\#el} \phi^{(l)} \underline{S}_f^{(l)} \sum_{l=1}^{\#el} \phi^{(l)} \underline{A}^{(l)}, \sum_{l=1}^{\#el} \phi^{(l)} \delta u^{(l)} \right\rangle_{\Omega} = 0 \end{aligned} \quad (7.2.15)$$



Debido a que las variables de interpolación $\underline{\phi}^{(l)}$ sólo tienen valor dentro del elemento (l) y fuera de este su valor es cero, entonces puede extraerse la sumatoria fuera del producto interno. Además, se propone que las funciones de interpolación sean las mismas para cada elemento y permanezcan invariantes a lo largo del tiempo dentro del dominio de solución. Esto permite escribir que $\underline{\phi}^{(l)} = \underline{\phi}$. Utilizando estas características de las funciones de interpolación, entonces el sistema de ecuaciones (7.2.14) y (7.2.15) se puede escribir como

$$\begin{aligned} & \sum_{l=1}^{\#el} \left\{ \left\langle \underline{\phi} \frac{\partial^2 \underline{A}^{(l)}}{\partial t^2}, \underline{\phi} \delta \underline{u}^{(l)} \right\rangle_{\Omega_{el}} + \left\langle G \underline{\phi} \frac{\partial \underline{A}^{(l)}}{\partial t}, \underline{\phi} \delta \underline{u}^{(l)} \right\rangle_{\Omega_{el}} + \left\langle \frac{\partial \underline{\phi}}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{A} \right)^{(l)}, \frac{\partial \underline{\phi}}{\partial x} \delta \underline{u}^{(l)} \right\rangle_{\Omega_{el}} + \right. \\ & \left. \left\langle g \frac{\partial \underline{\phi}}{\partial x} \underline{h}^{(l)} \underline{\phi} \underline{A}^{(l)}, \frac{\partial \underline{\phi}}{\partial x} \delta \underline{u}^{(l)} \right\rangle_{\Omega_{el}} + \left\langle g \underline{\phi} \underline{S}_f^{(l)} \underline{\phi} \underline{A}^{(l)}, \frac{\partial \underline{\phi}}{\partial x} \delta \underline{u}^{(l)} \right\rangle_{\Omega_{el}} - \left\langle G \underline{\phi} \underline{Q}^{(l)}, \frac{\partial \underline{\phi}}{\partial x} \delta \underline{u}^{(l)} \right\rangle_{\Omega_{el}} \right\} + \quad (7.2.16) \\ & \left[\left(\frac{df}{dt} + G f \right) \underline{\phi} \delta \underline{u}^{(l)} \right]_{\Gamma_N} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{l=1}^{\#el} \left\{ \left\langle \underline{\phi} \frac{\partial \underline{Q}^{(l)}}{\partial t}, \underline{\phi} \delta \underline{u}^{(l)} \right\rangle_{\Omega_{el}} + \left\langle \frac{\partial \underline{\phi}}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{A} \right)^{(l)}, \underline{\phi} \delta \underline{u}^{(l)} \right\rangle_{\Omega_{el}} + \right. \\ & \left. \left\langle g \frac{\partial \underline{\phi}}{\partial x} \underline{h}^{(l)} \underline{\phi} \underline{A}^{(l)}, \underline{\phi} \delta \underline{u}^{(l)} \right\rangle_{\Omega_{el}} + \left\langle g \underline{\phi} \underline{S}_f^{(l)} \underline{\phi} \underline{A}^{(l)}, \underline{\phi} \delta \underline{u}^{(l)} \right\rangle_{\Omega_{el}} \right\} = 0 \quad (7.2.17) \end{aligned}$$

Realizando un acomodo vectorial de las funciones de peso dentro del primer producto interno de la ecuación (7.2.16), de manera que

$$\underline{\phi} \frac{\partial^2 \underline{A}^{(l)}}{\partial t^2} \underline{\phi} \delta \underline{u}^{(l)} = \underline{\phi}^T \delta \underline{u}^{(l)T} \underline{\phi} \frac{\partial^2 \underline{A}^{(l)}}{\partial t^2} \quad (7.2.18)$$

y aplicando un acomodo vectorial similar a todos los términos en las ecuaciones (7.2.16) y (7.2.17)

$$\begin{aligned} & \sum_{l=1}^{\#el} \left\{ \int_{\Omega_{el}} \delta \underline{u}^{(l)T} \underline{\phi}^T \underline{\phi} \frac{\partial^2 \underline{A}^{(l)}}{\partial t^2} d\Omega + \int_{\Omega_{el}} G \delta \underline{u}^{(l)T} \underline{\phi}^T \underline{\phi} \frac{\partial \underline{A}^{(l)}}{\partial t} d\Omega + \right. \\ & \int_{\Omega_{el}} \delta \underline{u}^{(l)T} \frac{\partial \underline{\phi}^T}{\partial x} \frac{\partial \underline{\phi}}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{A} \right)^{(l)} d\Omega + \int_{\Omega_{el}} g \delta \underline{u}^{(l)T} \frac{\partial \underline{\phi}^T}{\partial x} \frac{\partial \underline{\phi}}{\partial x} \underline{h}^{(l)} \underline{\phi} \underline{A}^{(l)} d\Omega + \\ & \int_{\Omega_{el}} g \delta \underline{u}^{(l)T} \frac{\partial \underline{\phi}^T}{\partial x} \underline{\phi} \underline{S}_f^{(l)} \underline{\phi} \underline{A}^{(l)} d\Omega - \int_{\Omega_{el}} G \delta \underline{u}^{(l)T} \frac{\partial \underline{\phi}^T}{\partial x} \underline{\phi} \underline{Q}^{(l)} d\Omega + \\ & \left. \left[\delta \underline{u}^{(l)T} \underline{\phi}^T \left(\frac{df}{dt} + G f \right) \right]_{\Gamma_N} \right\} = 0 \quad (7.2.19) \end{aligned}$$



$$\sum_{l=1}^{\#el} \left\{ \int_{\Omega_{el}} \underline{\delta u}^{(l)T} \underline{\phi}^T \underline{\phi} \frac{\partial Q^{(l)}}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega_{el}} \underline{\delta u}^{(l)T} \underline{\phi}^T \frac{\partial \phi}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{A} \right)^{(l)} d\Omega \right. \\ \left. + g \left(\int_{\Omega_{el}} \underline{\delta u}^{(l)T} \underline{\phi}^T \frac{\partial \phi}{\partial x} \underline{h}^{(l)} \underline{\phi} d\Omega + \int_{\Omega_{el}} \underline{\delta u}^{(l)T} \underline{\phi}^T \underline{\phi} \underline{S}_f^{(l)} \underline{\phi} d\Omega + \right) \underline{A}^{(l)} \right\} = 0 \quad (7.2.20)$$

Debido a que los valores de $\underline{\delta u}^{(l)}$ son arbitrarios, y $Q^{(l)}$ y $A^{(l)}$ sólo tienen valores conocidos en los nodos, es posible extraerlos del producto interno en (7.2.19) y (7.2.20) como se muestra a continuación

$$\sum_{l=1}^{\#el} \underline{\delta u}^{(l)T} \left\{ \left[\int_{\Omega_{el}} \underline{\phi}^T \underline{\phi} d\Omega \right] \frac{\partial^2 \underline{A}^{(l)}}{\partial t^2} + G \left[\int_{\Omega_{el}} \underline{\phi}^T \underline{\phi} d\Omega \right] \frac{\partial \underline{A}^{(l)}}{\partial t} + \left[\int_{\Omega_{el}} \frac{\partial \phi^T}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} d\Omega \right] \left(\frac{Q^2}{A} \right)^{(l)} + \right. \\ \left. g \left[\int_{\Omega_{el}} \frac{\partial \phi^T}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} \underline{h}^{(l)} \underline{\phi} d\Omega \right] \underline{A}^{(l)} + g \left[\int_{\Omega_{el}} \frac{\partial \phi^T}{\partial x} \underline{\phi} \underline{S}_f^{(l)} \underline{\phi} d\Omega \right] \underline{A}^{(l)} - \right. \\ \left. G \left[\int_{\Omega_{el}} \frac{\partial \phi^T}{\partial x} \underline{\phi} d\Omega \right] \underline{Q}^{(l)} + \left[\underline{\phi}^T \left(\frac{df}{dt} + Gf \right) \right]_{\Gamma_N} \right\} = 0 \quad (7.2.21)$$

$$\sum_{l=1}^{\#el} \underline{\delta u}^{(l)T} \left\{ \left[\int_{\Omega_{el}} \underline{\phi}^T \underline{\phi} d\Omega \right] \frac{\partial Q^{(l)}}{\partial t} + \left[\int_{\Omega_{el}} \underline{\phi}^T \frac{\partial \phi}{\partial x} d\Omega \right] \left(\frac{Q^2}{A} \right)^{(l)} + \right. \\ \left. g \left(\int_{\Omega_{el}} \underline{\phi}^T \frac{\partial \phi}{\partial x} \underline{h}^{(l)} \underline{\phi} d\Omega + \int_{\Omega_{el}} \underline{\phi}^T \underline{\phi} \underline{S}_f^{(l)} \underline{\phi} d\Omega + \right) \underline{A}^{(l)} \right\} = 0 \quad (7.2.22)$$

Por otra parte, definiendo las siguientes matrices que contienen las funciones de interpolación como

$$\mathbf{M}^{(l)} \equiv \int_{\Omega_{el}} \underline{\phi}^T \underline{\phi} d\Omega \quad (7.2.23)$$

$$\mathbf{A}_1^{(l)} \equiv \int_{\Omega_{el}} \frac{\partial \phi^T}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} d\Omega \quad (7.2.24)$$

$$\mathbf{A}_2^{(l)} \equiv \int_{\Omega_{el}} \underline{\phi}^T \frac{\partial \phi}{\partial x} d\Omega \quad (7.2.25)$$

$$\mathbf{B}_1^{(l)} \equiv \int_{\Omega_{el}} \frac{\partial \phi^T}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} \underline{h}^{(l)} \underline{\phi} d\Omega + \int_{\Omega_{el}} \frac{\partial \phi^T}{\partial x} \underline{\phi} \underline{S}_f^{(l)} \underline{\phi} d\Omega \quad (7.2.26)$$

$$\mathbf{B}_2^{(l)} \equiv \int_{\Omega_{el}} \underline{\phi}^T \frac{\partial \phi}{\partial x} \underline{h}^{(l)} \underline{\phi} d\Omega + \int_{\Omega_{el}} \underline{\phi}^T \underline{\phi} \underline{S}_f^{(l)} \underline{\phi} d\Omega \quad (7.2.27)$$

$$\mathbf{C}_1^{(l)} \equiv \int_{\Omega_{el}} \frac{\partial \phi^T}{\partial x} \underline{\phi} d\Omega \quad (7.2.28)$$



$$\underline{P}_1^{(l)} \equiv \left[\underline{\phi}^T \left(\frac{df}{\partial t} + G f \right) \right]_{\Gamma_N} \quad (7.2.29)$$

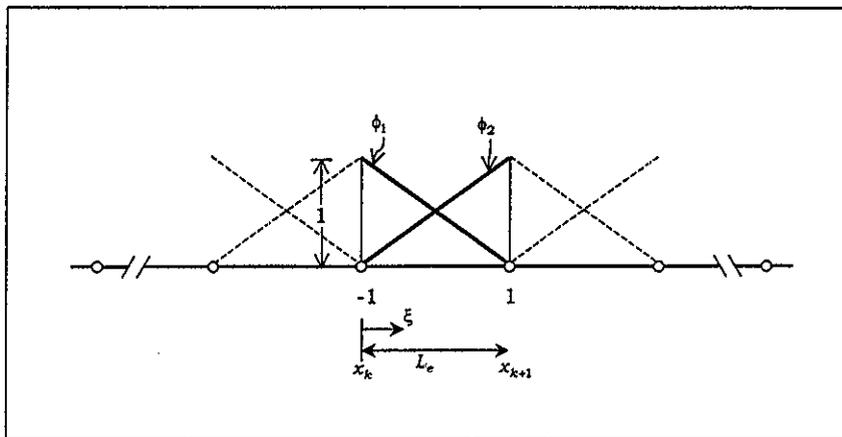
Utilizando (7.2.23), (7.2.24), (7.2.26), (7.2.28) y (7.2.29), entonces la formulación residual pesada de la GWCE (7.2.21) para cada elemento (l) se puede escribir como

$$\sum_{l=1}^{\#el} \left[\mathbf{M}^{(l)} \frac{\partial^2 \underline{A}^{(l)}}{\partial t^2} + G \mathbf{M}^{(l)} \frac{\partial \underline{A}^{(l)}}{\partial t} + \mathbf{A}_1^{(l)} \left(\frac{Q^2}{A} \right)^{(l)} + g \mathbf{B}_1^{(l)} \underline{A}^{(l)} - G \mathbf{C}_1^{(l)} \underline{Q}^{(l)} + \underline{P}_1^{(l)} \right] = 0 \quad (7.2.30)$$

y haciendo uso de (7.2.23), (7.2.25) y (7.2.27) en la ecuación de cantidad de movimiento (7.2.22)

$$\sum_{l=1}^{\#el} \left[\mathbf{M}^{(l)} \frac{\partial \underline{Q}^{(l)}}{\partial t} + \mathbf{A}_2^{(l)} \left(\frac{Q^2}{A} \right)^{(l)} + g \mathbf{B}_2^{(l)} \underline{A}^{(l)} \right] = 0 \quad (7.2.31)$$

Tomando una interpolación lineal para evaluar las funciones de interpolación $\underline{\phi}$ para cada elemento (l), (lámina 7.1), este tipo de polinomio interpolante cumple con los requisitos mínimos de continuidad para C^0 . Entonces las funciones de interpolación son:



Lamina 7.1. Funciones de interpolación ϕ_1 y ϕ_2 para un elemento (l) visto en forma local.

$$\underline{\phi} = \left[\frac{1}{2}(1-\xi) \quad \frac{1}{2}(1+\xi) \right] \quad (7.2.32)$$

además, se tienen las siguientes funciones de transformación de escala horizontal

$$\xi = -1 + \frac{2(x - x_k)}{L_e} \quad (7.2.33)$$

TESIS CON FALLA DE ORIGEN



$$dx = \frac{L_e}{2} d\xi \quad (7.2.34)$$

donde L_e , es el intervalo de discretización espacial.

Entonces, sustituyendo las funciones de interpolación (7.2.32) en las integrales (7.2.23)-(7.2.29), y resolviendo las integrales para cada elemento en forma local

$$\mathbf{M}^{(l)} = \frac{L_e}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (7.2.35)$$

$$\mathbf{A}_1^{(l)} = \frac{1}{L_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (7.2.36)$$

$$\mathbf{A}_2^{(l)} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (7.2.37)$$

$$\mathbf{B}_1^{(l)} = \frac{1}{2L_e} \begin{bmatrix} h_l - h_{l+1} & h_l - h_{l+1} \\ h_{l+1} - h_l & h_{l+1} - h_l \end{bmatrix} + \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -(2S_{f_l} + S_{f_{l+1}}) & -(S_{f_l} + 2S_{f_{l+1}}) \\ 2S_{f_l} + S_{f_{l+1}} & S_{f_l} + 2S_{f_{l+1}} \end{bmatrix} \quad (7.2.38)$$

$$\mathbf{B}_2^{(l)} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2(h_{l+1} - h_l) & h_{l+1} - h_l \\ h_{l+1} - h_l & 2(h_{l+1} - h_l) \end{bmatrix} + \frac{L_e}{12} \begin{bmatrix} 3S_{f_l} + S_{f_{l+1}} & S_{f_l} + S_{f_{l+1}} \\ S_{f_l} + S_{f_{l+1}} & S_{f_l} + 3S_{f_{l+1}} \end{bmatrix} \quad (7.2.39)$$

$$\mathbf{C}_1^{(l)} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (7.2.40)$$

$$\mathbf{P}_1^{(l)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \left[\frac{df}{dt} + Gf \right]_{\Gamma_N} \quad (7.2.41)$$

las matrices (7.2.35)-(7.2.41) son aplicables para un elemento arbitrario (l) en forma independiente; pero, en el caso de resolver para todo el dominio Ω , es necesario llevar a cabo un ensamblado global de estas matrices. La forma de hacerlo es aplicando un reacomodo de subíndices, como se puede ver en la lámina 7.2. Entonces el ensamblado global de las matrices (7.2.35)-(7.2.41) es

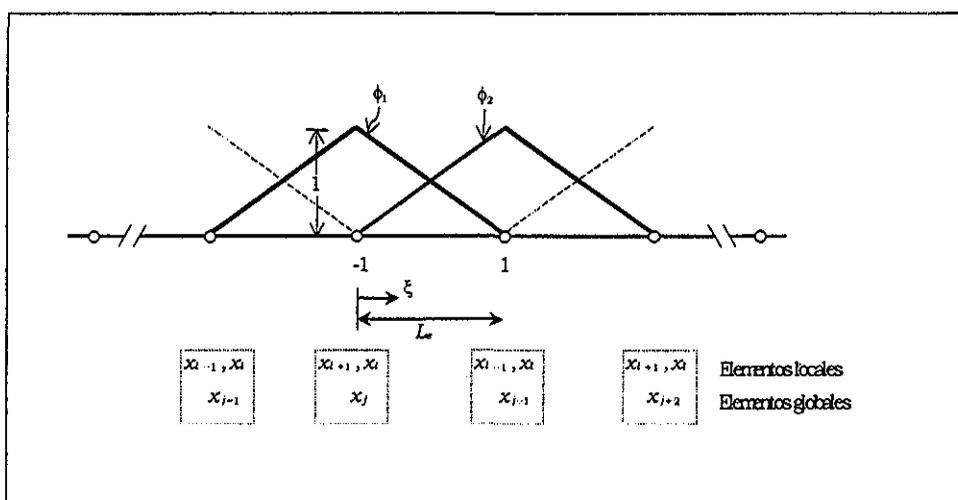


Lámina 7.2. Ensamblado global de matrices y reacomodo de subíndices.



TESIS CON FALLA DE ORIGEN



$$\mathbf{M} = \frac{L_e}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2+2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{L_e}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (7.2.42)$$

$$\mathbf{A}_1 = \frac{1}{L_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1+1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{L_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (7.2.43)$$

$$\mathbf{A}_2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1+1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (7.2.44)$$

$$\mathbf{B}_1 = \frac{1}{2L_e} \begin{bmatrix} h_{j-1} - h_j & h_{j-1} - h_j & 0 \\ h_j - h_{j-1} & -h_{j-1} + 2h_j - h_{j+1} & h_j - h_{j+1} \\ 0 & h_{j+1} - h_j & h_{j+1} - h_j \end{bmatrix} + \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -(2S_{f_{j-1}} + S_{f_j}) & -(S_{f_{j-1}} + 2S_{f_j}) & 0 \\ 2S_{f_{j-1}} + S_{f_j} & S_{f_{j-1}} - S_{f_{j+1}} & -S_{f_j} - 2S_{f_{j+1}} \\ 0 & -2S_{f_j} - S_{f_{j+1}} & S_{f_j} + 2S_{f_{j+1}} \end{bmatrix} \quad (7.2.45)$$

$$\mathbf{B}_2 = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2(h_j - h_{j-1}) & h_j - h_{j-1} & 0 \\ h_j - h_{j-1} & 2(h_{j+1} - h_{j-1}) & h_{j+1} - h_j \\ 0 & h_{j+1} - h_j & 2(h_{j+1} - h_j) \end{bmatrix} \quad (7.2.46)$$

$$+ \frac{\Delta x}{12} \begin{bmatrix} 3S_{f_{j-1}} + S_{f_j} & S_{f_{j-1}} + S_{f_j} & 0 \\ S_{f_{j-1}} + S_{f_j} & S_{f_{j-1}} + 6S_{f_j} + S_{f_{j+1}} & S_{f_j} + S_{f_{j+1}} \\ 0 & S_{f_j} + S_{f_{j+1}} & S_{f_j} + 3S_{f_{j+1}} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_1 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1+1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (7.2.47)$$

$$\underline{P}_1^{(k)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \left[\frac{df}{dt} + Gf \right]_{\Gamma_N} \quad (7.2.48)$$

y los vectores \underline{A} , \underline{Q} y $(\underline{Q}^2/\underline{A})$, que actúan sobre los nodos y para su manejo después del ensamblado global son:

$$\underline{A} = [A_{j-1} \quad A_j \quad A_{j+1}]^T \quad (7.2.49)$$

$$\underline{Q} = [Q_{j-1} \quad Q_j \quad Q_{j+1}]^T \quad (7.2.50)$$

$$\left(\frac{Q^2}{A} \right) = \left[\left(\frac{Q^2}{A} \right)_{j-1} \quad \left(\frac{Q^2}{A} \right)_j \quad \left(\frac{Q^2}{A} \right)_{j+1} \right]^T \quad (7.2.51)$$



Debido a que el ensamblado global no afecta la forma de manejo de las ecuaciones (7.2.30) y (7.2.31) para un elemento arbitrario en que se subdivide el dominio de solución, con este trabajo de ensamblado se obtienen la discretización por medio de la metodología de elemento finito de la formulación GWCE y la ecuación de cantidad de movimiento unidimensional en su versión conservativa.

7.2.3. Discretización temporal

Para la discretización temporal se propone utilizar un esquema implícito de tres niveles en el tiempo para la formulación GWCE (7.2.30), de forma que

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{M} \frac{\underline{A}^{n+1} - 2\underline{A}^n + \underline{A}^{n-1}}{\Delta t^2} + G \mathbf{M} \frac{\underline{A}^{n+1} - \underline{A}^{n-1}}{2\Delta t} + \\
 & \alpha_1 \left[\mathbf{A}_1 \left(\frac{Q^2}{A} \right)^{n+1} + g \mathbf{B}_1^{n+1} \underline{A}^{n+1} - G \mathbf{C}_1 \underline{Q}^{n+1} + \underline{P}_1^{n+1} \right] + \\
 & \alpha_2 \left[\mathbf{A}_1 \left(\frac{Q^2}{A} \right)^n + g \mathbf{B}_1^n \underline{A}^n - G \mathbf{C}_1 \underline{Q}^n + \underline{P}_1^n \right] + \\
 & \alpha_3 \left[\mathbf{A}_1 \left(\frac{Q^2}{A} \right)^{n-1} + g \mathbf{B}_1^{n-1} \underline{A}^{n-1} - G \mathbf{C}_1 \underline{Q}^{n-1} + \underline{P}_1^{n-1} \right] = 0
 \end{aligned} \tag{7.2.52}$$

donde Δt es el intervalo de tiempo de discretización; $n+1$, n y $n-1$ son los niveles de tiempo futuro, presente y pasado respectivamente; α_1, α_2 y α_3 los factores de peso temporal, los cuales se propone utilizar de manera que $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$ y $\alpha_1 = \alpha_3$ (Kinnmark, 1991; Luettich, *et al.*, 1992).

Para la discretizar la ecuación de cantidad de movimiento (7.2.31), se propone una aproximación tipo Crank-Nicolson (Zienkiewicz y Taylor, 1989; Reddy, 1993)

$$\mathbf{M} \frac{Q^{n+1} - Q^n}{\Delta t} + \frac{1}{2} \left[\mathbf{A}_2 \left(\frac{Q^2}{A} \right)^{n+1} + g \mathbf{B}_2^{n+1} \underline{A}^{n+1} \right] + \frac{1}{2} \left[\mathbf{A}_2 \left(\frac{Q^2}{A} \right)^n + g \mathbf{B}_2^n \underline{A}^n \right] = 0 \tag{7.2.53}$$

El sistema de ecuaciones (7.2.52) y (7.2.53) es la discretización final de la formulación GWCE y cantidad de movimiento conservativas unidimensionales, después de aplicar la metodología de elemento finito para la aproximación espacial y diferencias finitas para la aproximación temporal.





7.2.4. Análisis de consistencia

En este apartado se propone realizar un análisis de consistencia numérica del sistema de ecuaciones discretizadas de la formulación GWCE (7.2.52) y de la ecuación de cantidad de movimiento (7.2.53). Entonces, si las variables discretas dependientes A_j^n y Q_j^n tienen valores sólo en la posición $P(x_j, t_n)$, de donde se puede considerar una función polinomial que pase por cada punto de discretización del espacio de solución, tal que $A(x_j, t_n) = A_j^n$ y $Q(x_j, t_n) = Q_j^n$; los polinomios A y Q cumplen con los requisitos de continuidad suficientes que permiten aplicar una expansión en serie de Taylor de grado n . Entonces, cambiando las variables discretas A_j^n y Q_j^n por los polinomios A y Q en las ecuaciones discretizadas (7.2.52) y (7.2.53), de forma que:

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{M} \frac{\underline{A}^{n+1} - 2\underline{A}^n + \underline{A}^{n-1}}{\Delta t^2} + G\mathbf{M} \frac{\underline{A}^{n+1} - \underline{A}^{n-1}}{2\Delta t} + \\
 & \alpha_1 \left[\mathbf{A}_1 \left(\frac{Q^2}{A} \right)^{n+1} + g\mathbf{B}_1^{n+1} \underline{A}^{n+1} - G\mathbf{C}_1 \underline{Q}^{n+1} + \underline{P}_1^{n+1} \right] + \\
 & \alpha_2 \left[\mathbf{A}_1 \left(\frac{Q^2}{A} \right)^n + g\mathbf{B}_1^n \underline{A}^n - G\mathbf{C}_1 \underline{Q}^n + \underline{P}_1^n \right] + \\
 & \alpha_3 \left[\mathbf{A}_1 \left(\frac{Q^2}{A} \right)^{n-1} + g\mathbf{B}_1^{n-1} \underline{A}^{n-1} - G\mathbf{C}_1 \underline{Q}^{n-1} + \underline{P}_1^{n-1} \right] = 0
 \end{aligned} \tag{7.2.54}$$

$$\mathbf{M} \frac{Q^{n+1} - Q^n}{\Delta t} + \frac{1}{2} \left[\mathbf{A}_2 \left(\frac{Q^2}{A} \right)^{n+1} + g\mathbf{B}_2^{n+1} \underline{A}^{n+1} \right] + \frac{1}{2} \left[\mathbf{A}_2 \left(\frac{Q^2}{A} \right)^n + g\mathbf{B}_2^n \underline{A}^n \right] = 0 \tag{7.2.55}$$

Además, las matrices que tienen dependencia paramétrica $\mathbf{B}_1(A, Q)$ y $\mathbf{B}_2(A, Q)$ se evalúan considerando que $h(A_j) = h(A_j)$ y $S_j(A_j, Q_j) = S_f(A_j, Q_j)$, lo cual permite escribir estas matrices de la forma siguiente:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{B}_1 = & \frac{1}{2L_e} \begin{bmatrix} h_{j-1} - h_j & h_{j-1} - h_j & 0 \\ h_j - h_{j-1} & -h_{j-1} + 2h_j - h_{j+1} & h_j - h_{j+1} \\ 0 & h_{j+1} - h_j & h_{j+1} - h_j \end{bmatrix} + \\
 & \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -(2S_{f_{j-1}} + S_{f_j}) & -(S_{f_{j-1}} + 2S_{f_j}) & 0 \\ 2S_{f_{j-1}} + S_{f_j} & S_{f_{j-1}} - S_{f_{j+1}} & -S_{f_j} - 2S_{f_{j+1}} \\ 0 & -2S_{f_j} - S_{f_{j+1}} & S_{f_j} + 2S_{f_{j-1}} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{7.2.56}$$

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**



$$\begin{aligned}
 \mathbf{B}_2 = & \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2(h_j - h_{j-1}) & h_j - h_{j-1} & 0 \\ h_j - h_{j-1} & 2(h_{j+1} - h_{j-1}) & h_{j+1} - h_j \\ 0 & h_{j+1} - h_j & 2(h_{j+1} - h_j) \end{bmatrix} \\
 & + \frac{\Delta x}{12} \begin{bmatrix} 3S_{f_{j-1}} + S_{f_j} & S_{f_{j-1}} + S_{f_j} & 0 \\ S_{f_{j-1}} + S_{f_j} & S_{f_{j-1}} + 6S_{f_j} + S_{f_{j+1}} & S_{f_j} + S_{f_{j+1}} \\ 0 & S_{f_j} + S_{f_{j+1}} & S_{f_j} + 3S_{f_{j+1}} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{7.2.57}$$

Para estudiar la consistencia numérica del sistema (7.2.54) y (7.2.55), primero se analizará el comportamiento temporal, proponiendo desarrollar las expansiones en serie de Taylor para los tres niveles de tiempo de $F(x_j, t_{n+1})$, $F(x_j, t_{n-1})$ y $F(x_j, t_n)$ en donde

$$F_j^{n+1} = F(x, t + \Delta t)$$

$$= F(x, t) + \Delta t \left. \frac{\partial F}{\partial t} \right|_{(x,t)} + \frac{\Delta t^2}{2!} \left. \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} \right|_{(x,t)} + \frac{\Delta t^3}{3!} \left. \frac{\partial^3 F}{\partial t^3} \right|_{(x,t)} + \frac{\Delta t^4}{4!} \left. \frac{\partial^4 F}{\partial t^4} \right|_{(x,t)} + O([\Delta x + \Delta t]^4) \tag{7.2.58}$$

Para manejar una notación más compacta de la expansión en serie de Taylor anterior, se propone utilizar la siguiente notación $\partial F / \partial t = F_t$, $\partial^2 F / \partial t^2 = F_{tt}$, $\partial^3 F / \partial t^3 = F_{ttt}$, y $\partial^4 F / \partial t^4 = F_{tttt}$. Entonces la expansión (7.2.58) se puede escribir de la forma siguiente:

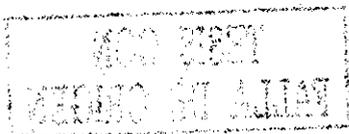
$$\begin{aligned}
 F_j^{n+1} &= F(x, t + \Delta t) \\
 &= F + \Delta t F_t + \frac{\Delta t^2}{2!} F_{tt} + \frac{\Delta t^3}{3!} F_{ttt} + \frac{\Delta t^4}{4!} F_{tttt} + O(\Delta t^5)
 \end{aligned} \tag{7.2.59}$$

y las expansiones en serie de Taylor para $F(x_j, t_{n-1})$ y $F(x_j, t_n)$

$$\begin{aligned}
 F_j^{n-1} &= F(x, t - \Delta t) \\
 &= F - \Delta t F_t + \frac{\Delta t^2}{2!} F_{tt} - \frac{\Delta t^3}{3!} F_{ttt} + \frac{\Delta t^4}{4!} F_{tttt} + O(\Delta t^5)
 \end{aligned} \tag{7.2.60}$$

$$F_j^n = F(x, t) = F \tag{7.2.61}$$

Sustituyendo las expansiones en serie de Taylor (7.2.59)-(7.2.61) en las variables dependientes y con dependencia paramétrica de la ecuación (7.2.54), y desarrollando esta sustitución término a término:





Primer término:

$$\begin{aligned} GM \frac{A^{n+1} - 2A^n + A^{n-1}}{\Delta t^2} &= \frac{GM}{\Delta t^2} \left(A + \Delta t A_t + \frac{\Delta t^2}{2!} A_{tt} + \frac{\Delta t^3}{3!} A_{ttt} + \frac{\Delta t^4}{4!} A_{tttt} - 2A + \right. \\ &\quad \left. A - \Delta t A_t + \frac{\Delta t^2}{2!} A_{tt} - \frac{\Delta t^3}{3!} A_{ttt} + \frac{\Delta t^4}{4!} A_{tttt} + O(\Delta t^5) \right) \\ &= GM \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + GM \frac{2\Delta t^2}{4!} \frac{\partial^4 A}{\partial t^4} + O(\Delta t^4) \end{aligned} \quad (7.2.62)$$

Segundo término:

$$\begin{aligned} GM \frac{A^{n+1} - A^{n-1}}{2\Delta t} &= \frac{GM}{2\Delta t} \left(A + \Delta t A_t + \frac{\Delta t^2}{2!} A_{tt} + \frac{\Delta t^3}{3!} A_{ttt} + \frac{\Delta t^4}{4!} A_{tttt} - \right. \\ &\quad \left. A + \Delta t A_t - \frac{\Delta t^2}{2!} A_{tt} + \frac{\Delta t^3}{3!} A_{ttt} - \frac{\Delta t^4}{4!} A_{tttt} + O(\Delta t^5) \right) \\ &= GM \frac{\partial A}{\partial t} + GM \frac{\Delta t^2}{3!} \frac{\partial^3 A}{\partial t^3} + O(\Delta t^4) \end{aligned} \quad (7.2.63)$$

Tercer término:

$$\begin{aligned} \alpha_1 A_1 \left(\frac{Q^2}{A} \right)^{n+1} + \alpha_2 A_1 \left(\frac{Q^2}{A} \right)^n + \alpha_3 A_1 \left(\frac{Q^2}{A} \right)^{n-1} &= A_1 \left\{ \alpha_1 \left[\left(\frac{Q^2}{A} \right) + \Delta t \left(\frac{Q^2}{A} \right)_t + \right. \right. \\ &\quad \left. \frac{\Delta t^2}{2!} \left(\frac{Q^2}{A} \right)_{tt} + \frac{\Delta t^3}{3!} \left(\frac{Q^2}{A} \right)_{ttt} + \frac{\Delta t^4}{4!} \left(\frac{Q^2}{A} \right)_{tttt} + O(\Delta t^5) \right] + \alpha_2 \left(\frac{Q^2}{A} \right) + \\ &\quad \left. \alpha_3 \left[\left(\frac{Q^2}{A} \right) - \Delta t \left(\frac{Q^2}{A} \right)_t + \frac{\Delta t^2}{2!} \left(\frac{Q^2}{A} \right)_{tt} - \frac{\Delta t^3}{3!} \left(\frac{Q^2}{A} \right)_{ttt} + \frac{\Delta t^4}{4!} \left(\frac{Q^2}{A} \right)_{tttt} + O(\Delta t^5) \right] \right\} \\ &= A_1 \left\{ (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) \left(\frac{Q^2}{A} \right) + (\alpha_1 - \alpha_3) \Delta t \left(\frac{Q^2}{A} \right)_t + (\alpha_1 + \alpha_3) \frac{\Delta t^2}{2!} \left(\frac{Q^2}{A} \right)_{tt} + \right. \\ &\quad \left. (\alpha_1 - \alpha_3) \frac{\Delta t^3}{3!} \left(\frac{Q^2}{A} \right)_{ttt} + (\alpha_1 + \alpha_3) \frac{\Delta t^4}{4!} \left(\frac{Q^2}{A} \right)_{tttt} + O(\Delta t^5) \right\} \end{aligned} \quad (7.2.64)$$

Recordando que los parámetros de ponderación de la aproximación temporal se consideran como $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$ y $\alpha_1 = \alpha_3$, entonces a la ecuación anterior se puede escribir como

$$\alpha_1 A_1 \left(\frac{Q^2}{A} \right)^{n+1} + \alpha_2 A_1 \left(\frac{Q^2}{A} \right)^n + \alpha_3 A_1 \left(\frac{Q^2}{A} \right)^{n-1} = A_1 \left(\frac{Q^2}{A} \right) + \alpha_1 \Delta t^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{Q^2}{A} \right) + O(\Delta t^4) \quad (7.2.65)$$

TESIS CON FALLA DE ORIGEN



Cuarto término:

$$\begin{aligned} \alpha_1 g (\mathbf{B}_1 \underline{\mathbf{A}})^{n+1} + \alpha_2 g (\mathbf{B}_1 \underline{\mathbf{A}})^n + \alpha_3 g (\mathbf{B}_1 \underline{\mathbf{A}})^{n-1} &= g \left\{ \alpha_1 \left[\mathbf{B}_1 \underline{\mathbf{A}} + \Delta t (\mathbf{B}_1 \underline{\mathbf{A}})_t + \frac{\Delta t^2}{2!} (\mathbf{B}_1 \underline{\mathbf{A}})_{tt} + \right. \right. \\ &\quad \left. \frac{\Delta t^2}{2!} (\mathbf{B}_1 \underline{\mathbf{A}})_{tt} + \frac{\Delta t^3}{3!} (\mathbf{B}_1 \underline{\mathbf{A}})_{ttt} + \frac{\Delta t^4}{4!} (\mathbf{B}_1 \underline{\mathbf{A}})_{tttt} + O(\Delta t^5) \right] + \alpha_2 \mathbf{B}_1 \underline{\mathbf{A}} + \\ &\quad \left. \alpha_3 \left[\mathbf{B}_1 \underline{\mathbf{A}} - \Delta t (\mathbf{B}_1 \underline{\mathbf{A}})_t + \frac{\Delta t^2}{2!} (\mathbf{B}_1 \underline{\mathbf{A}})_{tt} - \frac{\Delta t^3}{3!} (\mathbf{B}_1 \underline{\mathbf{A}})_{ttt} + \frac{\Delta t^4}{4!} (\mathbf{B}_1 \underline{\mathbf{A}})_{tttt} + O(\Delta t^5) \right] \right\} \\ &= g \mathbf{B}_1 \underline{\mathbf{A}} + g \alpha_1 \Delta t^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\mathbf{B}_1 \underline{\mathbf{A}}) + O(\Delta t^4) \end{aligned} \quad (7.2.66)$$

Quito término:

$$\begin{aligned} \alpha_1 G \mathbf{C}_1 \underline{\mathbf{Q}}^{n+1} + \alpha_2 G \mathbf{C}_1 \underline{\mathbf{Q}}^n + \alpha_3 G \mathbf{C}_1 \underline{\mathbf{Q}}^{n-1} &= G \mathbf{C}_1 \left\{ \alpha_1 \left[\underline{\mathbf{Q}} + \Delta t \underline{\mathbf{Q}}_t + \frac{\Delta t^2}{2!} \underline{\mathbf{Q}}_{tt} + \frac{\Delta t^3}{3!} \underline{\mathbf{Q}}_{ttt} + \right. \right. \\ &\quad \left. \frac{\Delta t^4}{4!} \underline{\mathbf{Q}}_{tttt} \right] + \alpha_2 \underline{\mathbf{Q}} + \alpha_3 \left[\underline{\mathbf{Q}} - \Delta t \underline{\mathbf{Q}}_t + \frac{\Delta t^2}{2!} \underline{\mathbf{Q}}_{tt} - \frac{\Delta t^3}{3!} \underline{\mathbf{Q}}_{ttt} + \frac{\Delta t^4}{4!} \underline{\mathbf{Q}}_{tttt} \right] + O(\Delta t^5) \left. \right\} \\ &= G \mathbf{C}_1 \underline{\mathbf{Q}} + \alpha_1 \Delta t^2 G \mathbf{C}_1 \frac{\partial^2 \underline{\mathbf{Q}}}{\partial t^2} + O(\Delta t^4) \end{aligned} \quad (7.2.67)$$

Sexto término:

$$\begin{aligned} \alpha_1 \underline{\mathbf{P}}^{n+1} + \alpha_2 \underline{\mathbf{P}}^n + \alpha_3 \underline{\mathbf{P}}^{n-1} &= \alpha_1 \left[\underline{\mathbf{P}} + \Delta t \underline{\mathbf{P}}_t + \frac{\Delta t^2}{2!} \underline{\mathbf{P}}_{tt} + \frac{\Delta t^3}{3!} \underline{\mathbf{P}}_{ttt} + \frac{\Delta t^4}{4!} \underline{\mathbf{P}}_{tttt} \right] + \\ &\quad \alpha_2 \underline{\mathbf{P}} + \alpha_3 \left[\underline{\mathbf{P}} - \Delta t \underline{\mathbf{P}}_t + \frac{\Delta t^2}{2!} \underline{\mathbf{P}}_{tt} - \frac{\Delta t^3}{3!} \underline{\mathbf{P}}_{ttt} + \frac{\Delta t^4}{4!} \underline{\mathbf{P}}_{tttt} \right] + O(\Delta t^5) \\ &= \underline{\mathbf{P}} + \alpha_1 \Delta t^2 \frac{\partial^2 \underline{\mathbf{P}}}{\partial t^2} + O(\Delta t^4) \end{aligned} \quad (7.2.68)$$

Sustituyendo las ecuaciones (7.2.62), (7.2.63) y (7.2.65)-(7.2.68) en (7.2.54), y agrupando por orden de aproximación temporal

$$\begin{aligned} \mathbf{M} \frac{\partial^2 \underline{\mathbf{A}}}{\partial t^2} + G \mathbf{M} \frac{\partial \underline{\mathbf{A}}}{\partial t} + \mathbf{A}_1 \left(\frac{\underline{\mathbf{Q}}^2}{\underline{\mathbf{A}}} \right) + g \mathbf{B}_1 \underline{\mathbf{A}} - G \mathbf{C}_1 \underline{\mathbf{Q}} + \underline{\mathbf{P}}_1 + \\ \Delta t^2 \left[\frac{2\mathbf{M}}{4!} \frac{\partial^4 \underline{\mathbf{A}}}{\partial t^4} + \frac{G\mathbf{M}}{3!} \frac{\partial^3 \underline{\mathbf{A}}}{\partial t^3} + \alpha_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\mathbf{A}_1 \left(\frac{\underline{\mathbf{Q}}^2}{\underline{\mathbf{A}}} \right) + g \mathbf{B}_1 \underline{\mathbf{A}} - G \mathbf{C}_1 \underline{\mathbf{Q}} + \underline{\mathbf{P}}_1 \right) \right] + O(\Delta t^4) = 0 \end{aligned} \quad (7.2.69)$$

Sustituyendo la ecuación (7.2.30) en la ecuación anterior, para el término de orden Δt^2





$$\begin{aligned} & \mathbf{M} \frac{\partial^2 \underline{A}}{\partial t^2} + G \mathbf{M} \frac{\partial \underline{A}}{\partial t} + \mathbf{A}_1 \left(\frac{\underline{Q}^2}{\underline{A}} \right) + g \mathbf{B}_1 \underline{A} - G \mathbf{C}_1 \underline{Q} + \underline{P}_1 \\ & + \Delta t^2 \left[\left(\frac{2}{4!} - \alpha_1 \right) \mathbf{M} \frac{\partial^4 \underline{A}}{\partial t^4} + \left(\frac{1}{3!} - \alpha_1 \right) \mathbf{M} \frac{\partial^3 \underline{A}}{\partial t^3} \right] + O(\Delta t^4) = 0 \end{aligned} \quad (7.2.70)$$

Por otra parte, siguiendo un procedimiento similar para la ecuación de cantidad de movimiento (7.2.55), aplicando las expansiones en serie de Taylor (7.2.59)-(7.2.61), y desarrollando término a término:

Primer término:

$$\begin{aligned} \mathbf{M} \frac{\underline{Q}^{n+1} - \underline{Q}^n}{\Delta t} &= \frac{\mathbf{M}}{\Delta t} \left(\underline{Q} + \Delta t \underline{Q}_t + \frac{\Delta t^2}{2!} \underline{Q}_{tt} + \frac{\Delta t^3}{3!} \underline{Q}_{ttt} + O(\Delta t^4) - \underline{Q} \right) \\ &= \mathbf{M} \frac{\partial \underline{Q}}{\partial t} + \mathbf{M} \Delta t \left(\frac{1}{2!} \frac{\partial^2 \underline{Q}}{\partial t^2} + \frac{\Delta t}{3!} \frac{\partial^3 \underline{Q}}{\partial t^3} \right) + O(\Delta t^3) \end{aligned} \quad (7.2.71)$$

Segundo término:

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{A}_2}{2} \left[\left(\frac{\underline{Q}^2}{\underline{A}} \right)^{n+1} + \left(\frac{\underline{Q}^2}{\underline{A}} \right)^n \right] &= \frac{\mathbf{A}_2}{2} \left[\left(\frac{\underline{Q}^2}{\underline{A}} \right) + \Delta t \left(\frac{\underline{Q}^2}{\underline{A}} \right)_t + \frac{\Delta t^2}{2!} \left(\frac{\underline{Q}^2}{\underline{A}} \right)_{tt} + O(\Delta t^3) + \left(\frac{\underline{Q}^2}{\underline{A}} \right) \right] \\ &= \mathbf{A}_2 \left(\frac{\underline{Q}^2}{\underline{A}} \right) + \Delta t \mathbf{A}_2 \left[\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\underline{Q}^2}{\underline{A}} \right) + \frac{\Delta t}{4} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\underline{Q}^2}{\underline{A}} \right) \right] + O(\Delta t^3) \end{aligned} \quad (7.2.72)$$

Tercer término:

$$\begin{aligned} \frac{g}{2} \left[(\mathbf{B}_2 \underline{A})^{n+1} + (\mathbf{B}_2 \underline{A})^n \right] &= \frac{g}{2} \left[\mathbf{B}_2 \underline{A} + \Delta t (\mathbf{B}_2 \underline{A})_t + \frac{\Delta t^2}{2!} (\mathbf{B}_2 \underline{A})_{tt} + O(\Delta t^3) - \mathbf{B}_2 \underline{A} \right] \\ &= g \mathbf{B}_2 \underline{A} + g \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{B}_2 \underline{A}) + g \frac{\Delta t^2}{4} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\mathbf{B}_2 \underline{A}) + O(\Delta t^3) \end{aligned} \quad (7.2.73)$$

y sustituyendo las ecuaciones (7.2.71)-(7.2.73) en (7.2.55):

$$\begin{aligned} & \mathbf{M} \frac{\partial \underline{Q}}{\partial t} + \mathbf{A}_2 \left(\frac{\underline{Q}^2}{\underline{A}} \right) + g \mathbf{B}_2 \underline{A} + \frac{\Delta t}{2} \left[\mathbf{M} \frac{\partial^2 \underline{Q}}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\mathbf{A}_2 \left(\frac{\underline{Q}^2}{\underline{A}} \right) + g \mathbf{B}_2 \underline{A} \right) \right] \\ & + \Delta t^2 \left[\frac{\mathbf{M}}{3!} \frac{\partial^3 \underline{Q}}{\partial t^3} + \frac{1}{4} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\mathbf{A}_2 \left(\frac{\underline{Q}^2}{\underline{A}} \right) + g \mathbf{B}_2 \underline{A} \right) \right] + O(\Delta t^3) = 0 \end{aligned} \quad (7.2.74)$$

Considerando la ecuación (7.2.31) en la ecuación anterior para el término de orden Δt^2 :

$$\mathbf{M} \frac{\partial \underline{Q}}{\partial t} + \mathbf{A}_2 \left(\frac{\underline{Q}^2}{\underline{A}} \right) + g \mathbf{B}_2 \underline{A} + \Delta t^2 \mathbf{M} \frac{\partial^3 \underline{Q}}{\partial t^3} \left(\frac{1}{3!} - \frac{1}{4} \right) + O(\Delta t^3) = 0 \quad (7.2.75)$$

Una vez analizada la aproximación temporal, se propone continuar el estudio de consistencia numérica en el sentido espacial. Para ello se propone



desarrollar las expansiones en serie de Taylor para las posiciones $F(x_{j+1}, t)$ y $F(x_{j-1}, t)$. En esta parte del estudio se considerará que $L_e = \Delta x = cte.$, por lo que

$$\begin{aligned} F_{j+1} &= F(x + \Delta x, t) \\ &= F + \Delta x F_x + \frac{\Delta x^2}{2!} F_{xx} + \frac{\Delta x^3}{3!} F_{xxx} + O(\Delta x^4) \end{aligned} \tag{7.2.76}$$

$$\begin{aligned} F_{j-1} &= F(x - \Delta x, t) \\ &= F - \Delta x F_x + \frac{\Delta x^2}{2!} F_{xx} - \frac{\Delta x^3}{3!} F_{xxx} + O(\Delta x^4) \end{aligned} \tag{7.2.77}$$

$$F_j = F(x, t) = F \tag{7.2.78}$$

Aplicando las expansiones en serie de Taylor (7.2.76)-(7.2.78) en (7.2.70), y desarrollando término a término:

Primer término:

$$\begin{aligned} \mathbf{M} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} &= \frac{\Delta x}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \begin{bmatrix} A - \Delta x A_x + \frac{\Delta x^2}{2!} A_{xx} - \frac{\Delta x^3}{3!} A_{xxx} + O(\Delta x^4) \\ A \\ A + \Delta x A_x + \frac{\Delta x^2}{2!} A_{xx} + \frac{\Delta x^3}{3!} A_{xxx} + O(\Delta x^4) \end{bmatrix}^T \\ &= \frac{\Delta x}{6} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} A - \frac{1}{3} \Delta x A_x + O(\Delta x^2) \\ A + \frac{1}{6} \Delta x^2 A_{xx} + O(\Delta x^4) \\ \frac{1}{2} A + \frac{1}{3} \Delta x A_x + O(\Delta x^2) \end{bmatrix}^T \end{aligned} \tag{7.2.79}$$

Segundo término:

$$\mathbf{GM} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = G \Delta x \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} A - \frac{1}{3} \Delta x A_x + O(\Delta x^2) \\ A + \frac{1}{6} \Delta x^2 A_{xx} + O(\Delta x^4) \\ \frac{1}{2} A + \frac{1}{3} \Delta x A_x + O(\Delta x^2) \end{bmatrix} \tag{7.2.80}$$





Tercer término:

$$\mathbf{A}_1 \left(\frac{Q^2}{A} \right) = \begin{bmatrix} -\left(\frac{Q^2}{A} \right)_x + \frac{1}{2} \Delta x \left(\frac{Q^2}{A} \right)_{xx} + O(\Delta x^2) \\ -\Delta x \left[\left(\frac{Q^2}{A} \right)_{xxx} + \frac{\Delta x^2}{12} \left(\frac{Q^2}{A} \right)_{xxxx} \right] + O(\Delta x^4) \\ \left(\frac{Q^2}{A} \right)_x + \frac{1}{2} \Delta x \left(\frac{Q^2}{A} \right)_{xx} + O(\Delta x^2) \end{bmatrix} \quad (7.2.81)$$

Cuarto Término:

Para el desarrollo del cuarto término, en primera instancia se tienen que aplicar las expansiones en serie de Taylor a los términos que generan la dependencia paramétrica con respecto al área (A) y el gasto (Q) en la matriz \mathbf{B}_1 , y después es necesario efectuar la multiplicación matricial por el vector del término dependiente. Esto resulta en

$$g \mathbf{B}_1 \underline{\mathbf{A}} = g \begin{bmatrix} -A(h_x + S_f) + \Delta x \left[A_x h_x + \frac{1}{2} A h_{xxx} + \frac{1}{2} (A S_f)_x \right] + O(\Delta x^2) \\ -\Delta x [A(h_x + S_f)]_x - \Delta x^3 \left[\frac{1}{6} (2A h_{xxxx} + \frac{3}{2} A_{xx} h_{xx} + A_x h_{xxx} + A_{xxx} h_x) \right. \\ \left. + \frac{1}{3} (A_x S_{fx})_x \right] + O(\Delta x^5) \\ A(h_x + S_f) + \Delta x \left[A_x h_x + \frac{1}{2} A h_{xxx} + \frac{1}{2} (A S_f)_x \right] + O(\Delta x^2) \end{bmatrix} \quad (7.2.82)$$

Quinto término:

$$G \mathbf{C}_1 \underline{\mathbf{Q}} = G \begin{bmatrix} -Q + \frac{1}{2} \Delta x Q_x + O(\Delta x^2) \\ \Delta x \left(Q_x + \frac{1}{6} \Delta x^2 Q_{xxx} \right) + O(\Delta x^5) \\ Q + \frac{1}{2} \Delta x Q_x + O(\Delta x^2) \end{bmatrix} \quad (7.2.83)$$

Debido a que el término que considera los efectos de la condición de frontera P_1 sólo toma valores en esta misma, pero no dentro del dominio, entonces, para determinar las ecuaciones dentro del dominio de solución espacial, se debe tomar en cuenta solamente el segundo renglón de los vectores (7.2.79)-(7.2.83), debido a que el primer renglón es el sistema de frontera izquierda y el tercer renglón la frontera derecha de cada elemento. Sin tomar en cuenta el ensamble entre los elementos, entonces la formulación GWCE (7.2.70) queda de la forma siguiente, una vez sustituido el segundo renglón de los vectores (7.2.79)-(7.2.83):



$$\begin{aligned}
 w(A, Q) = & \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + G \frac{\partial A}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{A} \right) + gA \left(\frac{\partial h}{\partial x} + S_f \right) - GQ \right] + \\
 & \frac{\Delta x^2}{6} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + G \frac{\partial A}{\partial t} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^4}{\partial x^4} \left(\frac{Q^2}{A} \right) - 2gA \frac{\partial^4 h}{\partial x^4} - \frac{3}{2} g \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - \right. \\
 & \left. g \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} + 2g \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial S_f}{\partial x} \frac{\partial A}{\partial x} \right) - G \frac{\partial^3 Q}{\partial x^3} \right) + \\
 & \Delta t^2 \left[\left(\frac{2}{4!} - \alpha_1 \right) \frac{\partial^4 A}{\partial t^4} + \left(\frac{1}{3!} - \alpha_1 \right) \frac{\partial^3 A}{\partial t^3} \right] + O \left(\left[\Delta t^2 + \Delta x^2 \right]^2 \right) = 0
 \end{aligned} \tag{7.2.84}$$

Además, considerando la relación (7.6) en la ecuación anterior:

$$\begin{aligned}
 w(A, Q) = & \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + G \frac{\partial A}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{A} \right) + gA \left(\frac{\partial h}{\partial x} + S_f \right) - GQ \right] + \\
 & \frac{\Delta x^2}{6} \left(\frac{3}{2} \frac{\partial^4}{\partial x^4} \left(\frac{Q^2}{A} \right) - 2G \frac{\partial^3 Q}{\partial x^3} - g \frac{\partial}{\partial x} \left(A \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} \right) - \frac{3}{2} g \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + 2g \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial S_f}{\partial x} \frac{\partial A}{\partial x} \right) \right) \\
 & \Delta t^2 \left[\left(\frac{2}{4!} - \alpha_1 \right) \frac{\partial^4 A}{\partial t^4} + \left(\frac{1}{3!} - \alpha_1 \right) \frac{\partial^3 A}{\partial t^3} \right] + O \left(\left[\Delta t^2 + \Delta x^2 \right]^2 \right) = 0
 \end{aligned} \tag{7.2.85}$$

Por otra parte, para determinar la consistencia numérica de la ecuación de cantidad de movimiento, sustituyendo las expansiones en serie de Taylor (7.2.76)-(7.2.78) en (7.2.75) y desarrollando término a término:

Primer término:

$$\mathbf{M} \frac{\partial Q}{\partial t} = G \Delta x \frac{\partial}{\partial t} \left[\begin{aligned} & \frac{1}{2} Q - \frac{1}{3} \Delta x Q_x + O(\Delta x^2) \\ & Q + \frac{1}{6} \Delta x^2 Q_{xx} + O(\Delta x^4) \\ & \frac{1}{2} Q + \frac{1}{3} \Delta x Q_x + O(\Delta x^2) \end{aligned} \right] \tag{7.2.86}$$

Segundo término:

$$\mathbf{A}_2 \left(\frac{Q^2}{A} \right) = \Delta x \left[\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left(\frac{Q^2}{A} \right)_x - \frac{1}{4} \Delta x \left(\frac{Q^2}{A} \right)_{xx} + O(\Delta x^2) \\ & \left(\frac{Q^2}{A} \right)_x + \frac{\Delta x^2}{6} \left(\frac{Q^2}{A} \right)_{xxx} + O(\Delta x^4) \\ & \frac{1}{2} \left(\frac{Q^2}{A} \right)_x + \frac{1}{4} \Delta x \left(\frac{Q^2}{A} \right)_{xx} + O(\Delta x^2) \end{aligned} \right] \tag{7.2.87}$$



Tercer término:

$$g\mathbf{B}_2\mathbf{A} = g \left[\begin{array}{l} \frac{1}{2} A(h_x + S_f) - \Delta x \left[\frac{1}{4} Ah_{xx} + \frac{1}{3} A_x h_x + \frac{1}{3} (AS_f)_x \right] + O(\Delta x^2) \\ A(h_x + S_f) + \frac{\Delta x^2}{6} \left[(A_x h_x)_x + Ah_{xxx} + (AS_{fx})_x + A_{xx} S_f \right] + O(\Delta x^4) \\ \frac{1}{2} A(h_x + S_f) + \Delta x \left[\frac{1}{4} Ah_{xx} + \frac{1}{3} A_x h_x + \frac{1}{3} (AS_f)_x \right] + O(\Delta x^2) \end{array} \right] \quad (7.2.88)$$

Sustituyendo (7.2.86)-(7.2.88) en (7.2.75), y considerando además la relación (2.3.53) para evaluar los términos de orden Δx^2 y desarrollando

$$m(A, Q) = \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{A} \right) + gA \left(\frac{\partial h}{\partial x} + S_f \right) - \frac{\Delta t^2}{12} \frac{\partial^3 Q}{\partial t^3} + \quad (7.2.89)$$

$$g \frac{\Delta x^2}{6} \frac{\partial A}{\partial x} \left[\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S_f}{\partial x^2} + \frac{\partial A}{\partial x} S_f \right] + O(\Delta t^3, \Delta t^2 \Delta x^2, \Delta x^4) = 0$$

El grado de consistencia numérica del esquema de discretización de la formulación GWCE y cantidad de movimiento desarrollado por medio de la metodología de elemento finito se puede englobar considerando el siguiente teorema:

Teorema 7.1 *Dada por un lado una discretización espacial por medio de la metodología de residuos pesados de Galerkin, aplicado en la formulación GWCE (7.6) y en la ecuación de cantidad de movimiento (2.3.53) y, además, por otro lado, dada una discretización temporal para la formulación GWCE (7.2.52), mediante una propuesta implícita de tres niveles de tiempo, así como para la ecuación de cantidad de movimiento (7.2.53) por medio de la propuesta de Crank-Nicholson. Entonces, estas propuesta de discretización son consistentes numéricamente bajo cualquier norma, cuando se tiene un refinamiento de malla tal que $\Delta x, \Delta t \rightarrow 0$.*

Demostración: Tomando las ecuaciones continuas de la formulación GWCE (7.6) y cantidad de movimiento conservativa (2.3.53), las cuales han sido discretizadas espacialmente por medio de la metodología de elemento finito y temporalmente por medio de diferencias finitas (ecuaciones 7.2.52 y 7.2.53), y una vez aplicada a estas ecuaciones una expansión en serie de Taylor y generado un refinamiento de malla, de forma tal que se logra la siguiente aproximación bajo cualquier norma

$$\| \mathcal{W}(A, Q) - w(A, Q) \| \rightarrow 0 \quad \text{cuando } \Delta x, \Delta t \rightarrow 0 \quad (7.2.90)$$

$$\| \mathcal{M}(A, Q) - m(A, Q) \| \rightarrow 0 \quad \text{cuando } \Delta x, \Delta t \rightarrow 0 \quad (7.2.91)$$



Por tanto, la propuesta de discretización (7.2.52) y (7.2.53) es consistente numéricamente con respecto a las ecuaciones de partida.

7.2.5. Construcción del sistema perturbado

Para realizar el estudio de propagación del sistema discretizado (7.2.52) y (7.2.53), se tendrán en cuenta las siguientes hipótesis de trabajo: el intervalo de discretización espacial es constante $L_e = \Delta x = cte.$, donde $\Delta x = L/J$ y donde J es un número entero; sólo se analizarán los nodos interiores, despreciando los efectos de frontera. Por tanto, el sistema de ecuaciones por analizar es:

$$\begin{aligned} & \underline{M} \frac{\underline{A}^{n+1} - 2\underline{A}^n + \underline{A}^{n-1}}{\Delta t^2} + \underline{GM} \frac{\underline{A}^{n+1} - \underline{A}^{n-1}}{2\Delta t} + \alpha_1 \left[\underline{A}_1 \left(\frac{Q^2}{A} \right)^{n+1} + g \underline{B}_1^{n+1} \underline{A}^{n+1} - \underline{GC}_1 \underline{Q}^{n+1} \right. \\ & \left. \alpha_2 \left[\underline{A}_1 \left(\frac{Q^2}{A} \right)^n + g \underline{B}_1^n \underline{A}^n - \underline{GC}_1 \underline{Q}^n \right] + \alpha_3 \left[\underline{A}_1 \left(\frac{Q^2}{A} \right)^{n-1} + g \underline{B}_1^{n-1} \underline{A}^{n-1} - \underline{GC}_1 \underline{Q}^{n-1} \right] \right] = 0 \end{aligned} \quad (7.2.92)$$

$$\underline{M} \frac{Q^{n+1} - Q^n}{\Delta t} + \frac{1}{2} \left[\underline{A}_2 \left(\frac{Q^2}{A} \right)^{n+1} + g \underline{B}_2^{n+1} \underline{A}^{n+1} \right] + \frac{1}{2} \left[\underline{A}_2 \left(\frac{Q^2}{A} \right)^n + g \underline{B}_2^n \underline{A}^n \right] = 0 \quad (7.2.93)$$

y los vectores \underline{M} , \underline{A}_1 , \underline{A}_2 , \underline{B}_1 y \underline{B}_2 son los valores del segundo renglón de las matrices de ensamblado global (7.2.42) - (7.2.47), de forma que

$$\underline{M} = \frac{\Delta x}{6} [1 \quad 4 \quad 1] \quad (7.2.94)$$

$$\underline{A}_1 = \frac{1}{\Delta x} [-1 \quad 2 \quad -1] \quad (7.2.95)$$

$$\underline{A}_2 = \frac{1}{2} [-1 \quad 0 \quad 1] \quad (7.2.96)$$

$$\begin{aligned} \underline{B}_1 = B_1(\underline{A}, \underline{Q}; \underline{x}, t) &= \frac{1}{2\Delta x} [h_j - h_{j-1} \quad -h_{j-1} + 2h_j - h_{j+1} \quad h_j - h_{j+1}] \\ &+ \frac{1}{6} [2S_{f_{j-1}} + S_{f_j} \quad S_{f_{j-1}} - S_{f_{j+1}} \quad -S_{f_j} - 2S_{f_{j+1}}] \end{aligned} \quad (7.2.97)$$

$$\begin{aligned} \underline{B}_2 = B_2(\underline{A}, \underline{Q}; \underline{x}, t) &= \frac{1}{6} [h_j - h_{j-1} \quad 2(h_{j+1} - h_{j-1}) \quad h_{j+1} - h_j] \\ &+ \frac{\Delta x}{12} [S_{f_{j-1}} + S_{f_j} \quad S_{f_{j-1}} + 6S_{f_j} + S_{f_{j+1}} \quad S_{f_j} + S_{f_{j+1}}] \end{aligned} \quad (7.2.98)$$

$$\underline{C}_1 = \frac{1}{2} [1 \quad 0 \quad -1] \quad (7.2.99)$$



En los vectores \underline{B}_1 y \underline{B}_2 se considera que las variables de la superficie libre del agua $h_j = h(A_j; x_j, t)$ y la pendiente de fricción $S_{fj} = S_f(A_j, Q_j; x_j, t)$ mantienen una dependencia paramétrica con respecto a las variables dependientes de área (A_j) y gasto (Q_j); el vector de posición queda especificado como: $\underline{x} = [x_{j-1} \quad x_j \quad x_{j+1}]$, y el término de frontera es nulo en la parte interior del dominio, por lo que $P_1 = 0$.

Ahora bien, se propone en esta parte del estudio una forma más compacta de escribir el sistema de ecuaciones (7.2.92) y (7.2.93) permitiendo tener un mejor manejo de los términos no lineales:

$$\underline{M}[\varphi \underline{A}^{n+1} - 2\underline{A}^n + (2 - \varphi)\underline{A}^{n-1}] + \alpha_1 \underline{\gamma}^{n+1} + \alpha_2 \underline{\gamma}^n + \alpha_3 \underline{\gamma}^{n-1} = 0 \quad (7.2.100)$$

$$\underline{M}[\underline{Q}^{n+1} - \underline{Q}^n] + \underline{\delta}^{n+1} + \underline{\delta}^n = 0 \quad (7.2.101)$$

donde las variables de simplificación $\underline{\gamma}$, $\underline{\delta}$ y φ agrupan los siguientes términos:

$$\underline{\gamma} = \underline{\gamma}(\underline{A}, \underline{Q}; \underline{x}, t) = \Delta t^2 \left[\underline{A}_1 \left(\frac{Q^2}{A} \right) + g B_1(\underline{A}, \underline{Q}; \underline{x}, t) \underline{A} - G C_1 \underline{Q} \right] \quad (7.2.102)$$

$$\underline{\delta} = \underline{\delta}(\underline{A}, \underline{Q}; \underline{x}, t) = \frac{\Delta t}{2} \left[\underline{A}_2 \left(\frac{Q^2}{A} \right) + g B_2(\underline{A}, \underline{Q}; \underline{x}, t) \underline{A} \right] \quad (7.2.103)$$

$$\varphi = 1 + \frac{G \Delta t}{2} \quad (7.2.104)$$

Entonces, para determinar las propiedades de propagación del esquema en el elemento finito aplicado a la formulación de la GWCE (7.2.100) y cantidad de movimiento (7.2.101), se propone introducir una pequeña perturbación sobre las variables dependientes, de forma que

$$A_j^n = \bar{A}_j^n + a_j^n \quad ; \quad \left\| \bar{A}_j^n \right\|_D \gg \left\| a_j^n \right\|_D \quad (7.2.105)$$

$$Q_j^n = \bar{Q}_j^n + q_j^n \quad ; \quad \left\| \bar{Q}_j^n \right\|_D \gg \left\| q_j^n \right\|_D \quad (7.2.106)$$

donde \bar{A}_j^n y \bar{Q}_j^n son valores de referencia que mantienen una variación suave o lenta dentro del dominio de solución, y a_j^n y q_j^n son pequeñas perturbaciones que actúan sobre los valores de referencia y tienen una variación brusca o rápida y $\|\cdot\|_D$ es cualquier tipo de norma sobre los valores discretos.

Debido a que las variables de referencia y de perturbación son discretas y solamente tienen valores en los puntos de discretización del dominio, y a fin de



determinar las propiedades de propagación de perturbaciones, se debe considerar lo siguiente: sea un polinomio que pasa por cada punto del espacio de discretización $\Omega = \Omega(x_j, t_n)$, de manera que $\bar{A}_j^n = \bar{A}_j^n$ y $\bar{Q}_j^n = \bar{Q}_j^n$, y las perturbaciones son pequeñas variaciones sobre las variables de referencia de estos polinomios. Además, los polinomios \bar{A}_j^n y \bar{Q}_j^n cumplen con los requisitos de continuidad de clase C^n y se dice que el espacio de solución $\Omega(x_j, t_n)$ es un espacio de Banach de la misma clase. Con el fin de tener una notación más compacta de las variables de referencia, ésta no se cambiarán de tipo times normal, sino que se mantendrá la notación de las variables discretas; pero se debe tener en cuenta que el no cambiar de notación no implica perder las características de continuidad anteriormente definidas.

Entonces, introduciendo las ecuaciones de perturbación (7.2.105) y (7.2.106) en el esquema de discretización (7.2.100) y (7.2.101)

$$\begin{aligned} & \underline{M} \left[\varphi \left(\bar{A}^{n+1} + \underline{a}^{n+1} \right) - 2 \left(\bar{A}^n + \underline{a}^n \right) + (2 - \varphi) \left(\bar{A}^{n-1} + \underline{a}^{n-1} \right) \right] + \\ & \alpha_1 \gamma \left(\bar{A} + \underline{a}, \bar{Q} + \underline{q} \right)_j^{n+1} + \alpha_2 \gamma \left(\bar{A} + \underline{a}, \bar{Q} + \underline{q} \right)^n + \alpha_3 \gamma \left(\bar{A} + \underline{a}, \bar{Q} + \underline{q} \right)^{n-1} = 0 \end{aligned} \quad (7.2.107)$$

$$\underline{M} \left[\left(\bar{Q}^{n+1} + \underline{q}^{n+1} \right) - \left(\bar{Q}^n + \underline{q}^n \right) \right] + \delta \left(\bar{A} + \underline{a}, \bar{Q} + \underline{q} \right)^{n+1} + \delta \left(\bar{A} + \underline{a}, \bar{Q} + \underline{q} \right)^n = 0 \quad (7.2.108)$$

y desarrollando el primer término de la ecuación de perturbación (7.2.107)

$$\begin{aligned} & \underline{M} \left[\varphi \left(\bar{A}^{n+1} + \underline{a}^{n+1} \right) - 2 \left(\bar{A}^n + \underline{a}^n \right) + (2 - \varphi) \left(\bar{A}^{n-1} + \underline{a}^{n-1} \right) \right] = \\ & \underline{M} \left[\varphi \bar{A}^{n+1} - 2 \bar{A}^n + (2 - \varphi) \bar{A}^{n-1} \right] + \underline{M} \left[\varphi \underline{a}^{n+1} - 2 \underline{a}^n + (2 - \varphi) \underline{a}^{n-1} \right] \end{aligned} \quad (7.2.109)$$

Para desarrollar los siguientes términos de la ecuación (7.2.107) se propone utilizar una expansión en serie de Fréchet-Taylor, debido a que estos términos tienen una dependencia paramétrica con respecto a las variables dependientes. Entonces:

$$\gamma \left(\bar{A} + \underline{a}, \bar{Q} + \underline{q} \right) = \gamma \left(\bar{A}, \bar{Q} \right) + \underline{a} \frac{\partial \gamma \left(\bar{A}, \bar{Q} \right)}{\partial \bar{A}} \Big|_{\bar{A}} + \underline{q} \frac{\partial \gamma \left(\bar{A}, \bar{Q} \right)}{\partial \bar{Q}} \Big|_{\bar{Q}} + O \left[\left(\|\underline{a}\|_D + \|\underline{q}\|_D \right)^2 \right] \quad (7.2.110)$$

Utilizando la ecuación (7.2.102) se pueden evaluar las derivadas de la expansión de Fréchet-Taylor de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \gamma \left(\bar{A}, \bar{Q} \right)}{\partial \bar{A}} \Big|_{\bar{A}} &= \Delta t^2 \left[\underline{A}_1 \frac{\partial}{\partial \bar{A}} \left(\frac{Q^2}{\bar{A}} \right) \Big|_{\bar{A}} + g \frac{\partial B_1 \left(\bar{A}, \bar{Q} \right)}{\partial \bar{A}} \Big|_{\bar{A}} \bar{A} + g B_1 \left(\bar{A}, \bar{Q} \right) \right] \\ &\equiv \bar{\gamma}_A \end{aligned} \quad (7.2.111)$$



$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial [y(\underline{A}, \underline{Q})]}{\partial Q} \right|_{\bar{Q}} &= \Delta t^2 \left[\underline{A}_1 \left. \frac{\partial}{\partial Q} \left(\frac{Q^2}{A} \right) \right|_{\bar{Q}} + g \left. \frac{\partial B_1(\underline{A}, \underline{Q})}{\partial Q} \right|_{\bar{Q}} \underline{A} - G \underline{C}_1 \right] \\ &\equiv \bar{\gamma}_Q \end{aligned} \quad (7.2.112)$$

A su vez, los términos de \underline{B}_1 que tienen una dependencia paramétrica en las ecuaciones (7.2.111) y (7.2.112) se pueden desarrollar haciendo uso de la ecuación (7.2.97), como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial [B_1(\underline{A}, \underline{Q})]}{\partial A} \right|_{\bar{A}} &= \frac{1}{2\Delta x} [\bar{h}_{A_j} - \bar{h}_{A_{j-1}} \quad -\bar{h}_{A_{j-1}} + 2\bar{h}_{A_j} - \bar{h}_{A_{j+1}} \quad \bar{h}_{A_j} - \bar{h}_{A_{j+1}}] + \\ &\quad \frac{1}{6} [2\bar{S}_{f_{A_{j-1}}} + \bar{S}_{f_{A_j}} \quad \bar{S}_{f_{A_{j-1}}} - \bar{S}_{f_{A_{j+1}}} \quad -\bar{S}_{f_{A_j}} - 2\bar{S}_{f_{A_{j+1}}}] \\ &\equiv \bar{B}_{1_A} \end{aligned} \quad (7.2.113)$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial [B_1(\underline{A}, \underline{Q})]}{\partial Q} \right|_{\bar{Q}} &= \frac{1}{6} [2\bar{S}_{f_{Q_{j-1}}} + \bar{S}_{f_{Q_j}} \quad \bar{S}_{f_{Q_{j-1}}} - \bar{S}_{f_{Q_{j+1}}} \quad -\bar{S}_{f_{Q_j}} - 2\bar{S}_{f_{Q_{j+1}}}] \\ &\equiv \bar{B}_{1_Q} \end{aligned} \quad (7.2.114)$$

donde las variables \bar{h}_A , \bar{S}_{f_A} y \bar{S}_{f_Q} se evalúan por las ecuaciones (5.2.11), (5.2.15) y (5.2.16) respectivamente.

Por último, la expansión en serie de Fréchet-Taylor (7.2.110) se puede escribir como:

$$y(\underline{A} + \underline{a}, \underline{Q} + \underline{q}) = \bar{y} + \underline{a} \bar{\gamma}_A + \underline{q} \bar{\gamma}_Q + O\left[\left(\|\underline{a}\|_D + \|\underline{q}\|_D\right)^2\right] \quad (7.2.115)$$

y los términos $\bar{\gamma}_A$ y $\bar{\gamma}_Q$ son:

$$\bar{\gamma}_A = \Delta t^2 \left[-\underline{A}_1 \left(\frac{\bar{Q}^2}{\bar{A}^2} \right) + g \bar{B}_{1_A} \bar{A} + g \bar{B}_1 \right] \quad (7.2.116)$$

$$\bar{\gamma}_Q = \Delta t^2 \left[2\underline{A}_1 \left(\frac{\bar{Q}}{\bar{A}} \right) + g \bar{B}_{1_Q} \bar{A} - G \underline{C}_1 \right] \quad (7.2.117)$$

Por tanto, el desarrollo de la ecuación de perturbación de la formulación GWCE (7.2.107) se construye sustituyendo las ecuaciones (7.2.109) y (7.2.115) y agrupando:



$$\begin{aligned} & \underline{M} \left[\varphi \underline{\bar{A}}^{n+1} - 2\underline{\bar{A}}^n + (2-\varphi)\underline{\bar{A}}^{n-1} \right] + \alpha_1 \underline{\bar{Y}}^{-n+1} + \alpha_2 \underline{\bar{Y}}^{-n} + \alpha_3 \underline{\bar{Y}}^{-n-1} + \\ & \underline{M} \left[\varphi \underline{a}^{n+1} - 2\underline{a}^n + (2-\varphi)\underline{a}^{n-1} \right] + \alpha_1 \left[\underline{a}^{n+1} \underline{Y}_A^{-n+1} + \underline{q}^{n+1} \underline{Y}_Q^{-n+1} \right] + \alpha_2 \left[\underline{a}^n \underline{Y}_A^{-n} + \underline{q}^n \underline{Y}_Q^{-n} \right] + \\ & \alpha_3 \left[\underline{a}^{n-1} \underline{Y}_A^{-n-1} + \underline{q}^{n-1} \underline{Y}_Q^{-n-1} \right] + O \left[\left(\|\underline{a}\|_D + \|\underline{q}\|_D \right)^2 \right] = 0 \end{aligned} \quad (7.2.118)$$

Para el desarrollo de la ecuación de cantidad de movimiento de perturbación (7.2.108) se sigue un procedimiento similar al utilizado para la formulación GWCE. Entonces:

$$\begin{aligned} & \underline{M} \left(\underline{\bar{Q}}^{n+1} - \underline{\bar{Q}}^n \right) + \underline{\bar{\delta}}^{n+1} + \underline{\bar{\delta}}^n + \underline{M} \left(\underline{q}^{n+1} - \underline{q}^n \right) + \underline{a}^{n+1} \underline{\bar{\delta}}_A^{n+1} + \underline{q}^{n+1} \underline{\bar{\delta}}_Q^{n+1} + \\ & \underline{a}^n \underline{\bar{\delta}}_A^n + \underline{q}^n \underline{\bar{\delta}}_Q^n + O \left[\left(\|\underline{a}\|_D + \|\underline{q}\|_D \right)^2 \right] = 0 \end{aligned} \quad (7.2.119)$$

donde

$$\underline{\bar{\delta}}_A = \frac{\Delta t}{2} \left[-\underline{A}_2 \left(\frac{\underline{\bar{Q}}^2}{\underline{A}^2} \right) + g \underline{\bar{B}}_{2_A} \underline{\bar{A}} + g \underline{\bar{B}}_2 \right] \quad (7.2.120)$$

$$\underline{\bar{\delta}}_Q = \frac{\Delta t}{2} \left[2\underline{A}_2 \left(\frac{\underline{\bar{Q}}}{\underline{A}} \right) + g \underline{\bar{B}}_{2_Q} \underline{\bar{A}} \right] \quad (7.2.121)$$

$$\begin{aligned} \underline{\bar{B}}_{2_A} = & \frac{1}{6} \left[\underline{\bar{h}}_{A_j} - \underline{\bar{h}}_{A_{j-1}} \quad 2(\underline{\bar{h}}_{A_{j+1}} - \underline{\bar{h}}_{A_{j-1}}) \quad \underline{\bar{h}}_{A_{j+1}} - \underline{\bar{h}}_{A_j} \right] + \\ & \frac{\Delta x}{12} \left[\underline{\bar{S}}_{f_{A_{j-1}}} + \underline{\bar{S}}_{f_{A_j}} \quad \underline{\bar{S}}_{f_{A_{j-1}}} + 6\underline{\bar{S}}_{f_{A_j}} + \underline{\bar{S}}_{f_{A_{j+1}}} \quad \underline{\bar{S}}_{f_{A_j}} + \underline{\bar{S}}_{f_{A_{j+1}}} \right] \end{aligned} \quad (7.2.122)$$

$$\underline{\bar{B}}_{2_Q} = \frac{\Delta x}{12} \left[\underline{\bar{S}}_{f_{Q_{j-1}}} + \underline{\bar{S}}_{f_{Q_j}} \quad \underline{\bar{S}}_{f_{Q_{j-1}}} + 6\underline{\bar{S}}_{f_{Q_j}} + \underline{\bar{S}}_{f_{Q_{j+1}}} \quad \underline{\bar{S}}_{f_{A_j}} + \underline{\bar{S}}_{f_{Q_{j+1}}} \right] \quad (7.2.123)$$

En el sistema de ecuaciones (7.2.118) y (7.2.119) se distinguen dos partes, una que agrupa los términos del sistema de referencia (7.2.100) y (7.2.101) y, como se definió anteriormente, son las ecuaciones de referencia:

$$\underline{M} \left[\varphi \underline{\bar{A}}^{n+1} - 2\underline{\bar{A}}^n + (2-\varphi)\underline{\bar{A}}^{n-1} \right] + \alpha_1 \underline{\bar{Y}}^{-n+1} + \alpha_2 \underline{\bar{Y}}^{-n} + \alpha_3 \underline{\bar{Y}}^{-n-1} = 0 \quad (7.2.124)$$

$$\underline{M} \left(\underline{\bar{Q}}^{n+1} - \underline{\bar{Q}}^n \right) + \underline{\bar{\delta}}^{n+1} + \underline{\bar{\delta}}^n = 0 \quad (7.2.125)$$

La otra parte son las ecuaciones perturbadas que tienen influencia sobre las escalas pequeñas:



$$\begin{aligned} & \underline{M} \left[\underline{\phi} \underline{a}^{n+1} - 2\underline{a}^n + (2 - \underline{\phi}) \underline{a}^{n-1} \right] + \alpha_1 \left[\underline{a}^{n+1} \underline{\gamma}_A^{n+1} + \underline{q}^{n+1} \underline{\gamma}_Q^{n+1} \right] + \alpha_2 \left[\underline{a}^n \underline{\gamma}_A^n + \underline{q}^n \underline{\gamma}_Q^n \right] \\ & + \alpha_3 \left[\underline{a}^{n-1} \underline{\gamma}_A^{n-1} + \underline{q}^{n-1} \underline{\gamma}_Q^{n-1} \right] + O \left[\left(\|\underline{a}\|_D + \|\underline{q}\|_D \right)^2 \right] = 0 \end{aligned} \quad (7.2.126)$$

$$\underline{M} \left(\underline{q}^{n+1} - \underline{q}^n \right) + \underline{a}^{n+1} \underline{\delta}_A^{n+1} + \underline{q}^{n+1} \underline{\delta}_Q^{n+1} + \underline{a}^n \underline{\delta}_A^n + \underline{q}^n \underline{\delta}_Q^n + O \left[\left(\|\underline{a}\|_D + \|\underline{q}\|_D \right)^2 \right] = 0 \quad (7.2.127)$$

7.2.6. Análisis de localización

De igual manera que para la localización del esquema de Preissmann y de Leendertse, y no es la excepción para el esquema de discretización de la formulación GWCE (7.1.126) y cantidad de movimiento conservativa (7.2.127), es necesario transformar los operadores en diferencias de estas ecuaciones a un sistema de ecuaciones con operadores continuos. Para ello es necesario aplicar un análisis de consistencia numérica al sistema discreto perturbado (7.1.126) y (7.1.127). Por tanto, sustituyendo las expansiones temporales en serie de Taylor (7.2.59)-(7.2.61) en (7.1.126) y (7.1.127), de forma que

$$\begin{aligned} & \underline{M} \left(\frac{\partial^2 \underline{a}}{\partial t^2} + G \frac{\partial \underline{a}}{\partial t} \right) + \underline{a} \underline{\gamma}_A + \underline{q} \underline{\gamma}_Q + \alpha_1 \Delta t^2 \underline{M} \left[\left(\frac{2}{4!} - \alpha_1 \right) \frac{\partial^4 \underline{a}}{\partial t^4} + \left(\frac{1}{3!} - \alpha_1 \right) \frac{\partial^3 \underline{a}}{\partial t^3} \right] + \\ & O \left[\left(\|\underline{a}\|_D + \|\underline{q}\|_D \right)^2, \Delta t^4 \right] = 0 \end{aligned} \quad (7.2.128)$$

$$\underline{M} \frac{\partial \underline{q}}{\partial t} + \underline{a} \underline{\delta}_A + \underline{q} \underline{\delta}_Q + \Delta t^2 \underline{M} \frac{\partial^3 \underline{q}}{\partial t^3} \left(\frac{1}{3!} - \frac{1}{4} \right) + O \left[\left(\|\underline{a}\|_D + \|\underline{q}\|_D \right)^2, \Delta t^4 \right] = 0 \quad (7.2.129)$$

Además, sustituyendo las expansiones espaciales (7.2.76)-(7.2.78) en (7.2.128) y (7.2.129), y desarrollando

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \underline{a}}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left[2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\bar{Q}}{A} \underline{q} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\bar{Q}^2}{A^2} \underline{a} \right) \right] + g \bar{A} \left(\frac{\partial (\bar{h}_{AA})}{\partial x} + \underline{a} \bar{S}_{f_A} + \underline{q} \bar{S}_{f_Q} \right) + g \underline{a} \left(\frac{\partial \bar{h}}{\partial x} + \bar{S}_f \right) + \\ & G \left(\frac{\partial \underline{a}}{\partial t} + \frac{\partial \underline{q}}{\partial x} \right) + \alpha_1 \Delta t^2 \left[\left(\frac{2}{4!} - \alpha_1 \right) \frac{\partial^4 \underline{a}}{\partial t^4} + \left(\frac{1}{3!} - \alpha_1 \right) \frac{\partial^3 \underline{a}}{\partial t^3} \right] + \\ & \Delta x^2 \left[\frac{1}{4!} \frac{\partial^4}{\partial x^4} \left(\frac{\bar{Q}^2}{A^2} \underline{a} - \frac{\bar{Q}}{A} \underline{q} \right) + \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 \underline{q}}{\partial x^3} - \Theta_1 - \Theta_2 - \Theta_3 \right] + \\ & O \left[\left(\|\underline{a}\|_D + \|\underline{q}\|_D \right)^2, \left(\Delta x^2 + \Delta t^2 \right)^2 \right] = 0 \end{aligned} \quad (7.2.130)$$



$$\frac{\partial q}{\partial t} + 2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\bar{Q}}{A} q \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\bar{Q}^2}{A^2} a \right) + g \bar{A} \left(\frac{\partial(\bar{h}_{AA})}{\partial x} + a \bar{S}_{f_A} + q \bar{S}_{f_0} \right) + g a \left(\frac{\partial \bar{h}}{\partial x} + \bar{S}_f \right) - \quad (7.2.131)$$

$$\frac{\Delta t^2}{12} \frac{\partial^3 q}{\partial t^3} + \frac{\Delta x^2}{3!} (\Theta_4 + \Theta_5) + O \left[\left(\|\underline{a}\|_D + \|\underline{q}\|_D \right)^2, (\Delta x^2 + \Delta t^2)^2 \right] = 0$$

donde las variables $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3, \Theta_4$ y Θ_5 son:

$$\Theta_1 = \frac{1}{4!} \frac{\partial^4(\bar{h}_{AA})}{\partial x^4} + \frac{1}{3!} \frac{\partial(\bar{h}_{AA})}{\partial x} \frac{\partial^3 \bar{A}}{\partial x^3} + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2(\bar{h}_{AA})}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial x^2} + \frac{1}{3!} \frac{\partial^3(\bar{h}_{AA})}{\partial x^3} \frac{\partial \bar{A}}{\partial x} + \frac{1}{3!} a \bar{S}_{f_A} \frac{\partial^3 \bar{A}}{\partial x^3} + \frac{\partial(a \bar{S}_{f_A})}{\partial x} \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(a \bar{S}_{f_A})}{\partial x^2} \frac{\partial \bar{A}}{\partial x} + \frac{1}{2!} \frac{\partial^3(a \bar{S}_{f_A})}{\partial x^3} \bar{A} \quad (7.2.132)$$

$$\Theta_2 = \frac{1}{4!} \frac{\partial^4 h}{\partial x^4} a + \frac{1}{3!} \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial^3 a}{\partial x^3} + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} + \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{1}{3!} \bar{S}_f \frac{\partial^3 a}{\partial x^3} + \frac{\partial \bar{S}_f}{\partial x} \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{S}_f}{\partial x^2} \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{1}{2!} \frac{\partial^3 \bar{S}_f}{\partial x^3} a \quad (7.2.133)$$

$$\Theta_3 = \frac{1}{3!} q \bar{S}_{f_0} \frac{\partial^3 \bar{A}}{\partial x^3} + \frac{\partial(q \bar{S}_{f_0})}{\partial x} \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(q \bar{S}_{f_0})}{\partial x^2} \frac{\partial \bar{A}}{\partial x} + \frac{1}{2!} \frac{\partial^3(q \bar{S}_{f_0})}{\partial x^3} \bar{A} \quad (7.2.134)$$

$$\Theta_4 = \frac{\partial}{\partial x} \left[- \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\bar{Q}^2}{A^2} a \right) + g \bar{A} \left(\frac{\partial(\bar{h}_{AA})}{\partial x} \frac{\partial \bar{A}}{\partial x} + a \bar{S}_{f_A} \bar{A} + \frac{\partial \bar{h}}{\partial x} \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial \bar{S}_f}{\partial x} a \right) \right] + \frac{\partial^3(\bar{h}_{AA})}{\partial x^3} \bar{A} + g a \bar{S}_{f_A} \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial x^2} + \frac{\partial^3 \bar{h}}{\partial x^3} a + \bar{S}_f \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} \quad (7.2.135)$$

$$\Theta_5 = \frac{\partial}{\partial x} \left[2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\bar{Q}}{A} q \right) + g \bar{A} \frac{\partial(q \bar{S}_{f_0})}{\partial x} \right] + g q \bar{S}_{f_0} \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial x^2} \quad (7.2.136)$$

De esta forma han sido transformadas las ecuaciones de diferencias (7.2.126) y (7.2.127) en un sistema de operadores continuos (7.2.130) y (7.2.131). Para proceder al escalamiento de estas ecuaciones, y dado que se tienen las mismas características para aplicar la hipótesis de separación de escalas (4.1.46)-(4.1.50) en punto arbitrario (x_0, t_0) , se pueden utilizar los siguientes escalamientos: para las variables independientes de referencia o de escala grande, ecuaciones (4.1.51)-(4.1.53); variables independientes de perturbación o de escala lenta, ecuaciones (4.1.66) y (4.1.67); variables dependientes de referencia y con dependencia paramétrica, ecuaciones (4.1.54)-(4.1.58); variables dependientes de perturbación, ecuaciones (4.1.70) y (4.1.71), y para delimitar la relación entre las escalas lentas y rápidas, ecuación (4.1.69). Entonces se sustituyen (4.1.54)-(4.1.58), (4.1.70) y (4.1.71) en las ecuaciones



perturbadas de la formulación GWCE (7.2.130) y de cantidad de movimiento (7.2.131). Aplicando un desarrollo similar al utilizado en el subcapítulo (7.1.2) para escalar estas ecuaciones perturbadas, se tiene que:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 a^*}{\partial \tau^2} - \frac{2Q^*}{A^*} \frac{\partial^2 q^*}{\partial \zeta^2} + \frac{Q^*}{A^{*2}} \frac{\partial^2 a^*}{\partial \zeta^2} + g \frac{h_o}{U_o^2} A^* h_A^* \frac{\partial^2 a^*}{\partial \zeta^2} \\ & - g \frac{\varepsilon}{\delta} S_{f_o} A^* \left(\frac{\partial a^*}{\partial \zeta} S_{f_A}^* + \frac{\partial q^*}{\partial \zeta} S_{f_o}^* \right) + G \frac{\Lambda_x}{U_o} \left(\frac{\partial a^*}{\partial \tau} + \frac{\partial q^*}{\partial \zeta} \right) + O(\varepsilon) = 0 \end{aligned} \quad (7.2.137)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial q^*}{\partial \tau} + 2 \frac{Q^*}{A^*} \frac{\partial q^*}{\partial \zeta} - \frac{Q^{*2}}{A^{*2}} \frac{\partial a^*}{\partial \zeta} + g \frac{h_o}{U_o^2} A^* h_A^* \frac{\partial a^*}{\partial \zeta} + \\ & g \frac{\varepsilon}{\delta} S_{f_o} \left[a^* A^* S_{f_A}^* + q^* A^* S_{f_o}^* \right] + O(\varepsilon) = 0 \end{aligned} \quad (7.2.138)$$

Comparando el resultado del escalamiento anterior con el escalamiento que se obtuvo en el subcapítulo (7.1.2) (ecuaciones 7.1.46 y 7.1.49), se puede observar que ambos sistemas son idénticos y, por tanto, en el caso de aplicar un análisis de localización el resultado que se obtiene es el mismo. Entonces, las ecuaciones localizadas en su versión dimensional son:

$$\frac{\partial^2 a}{\partial t^2} - 2U_o \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + U_o^2 (1 - F_r^{-2}) \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} - F_1 \frac{\partial a}{\partial x} - F_2 \frac{\partial q}{\partial x} + G \left(\frac{\partial a}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} \right) = 0 \quad (7.2.139)$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} + 2U_o \frac{\partial q}{\partial x} - U_o^2 (1 - F_r^{-2}) \frac{\partial a}{\partial x} + F_1 a + F_1 q = 0 \quad (7.2.140)$$

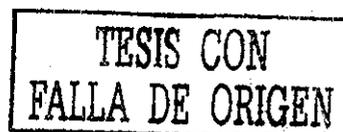
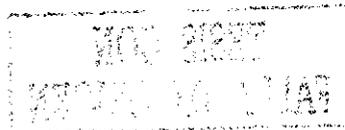
donde F_1 y F_2 son definidas por las ecuaciones (4.1.99) y (4.1.100) respectivamente. Además, el sistema de ecuaciones anterior es un problema de valor inicial puro lineal y de coeficientes constantes.

Como se puede observar el sistema (7.2.139) y (7.2.140) es un sistema localizado y sólo depende de las variables rápidas a nivel local, entonces dado que este sistema tiene su origen del sistema perturbado (7.2.126) y (7.2.127), por lo tanto el sistema localizado (7.2.139) y (7.2.140) se puede escribir como:

$$\begin{aligned} & \underline{M} \frac{a^{n+1} - 2a^n + a^{n-1}}{\Delta t^2} + \underline{GM} \frac{a^{n+1} - a^{n-1}}{2\Delta t} + \\ & \alpha_1 \left[\gamma_1 a^{n+1} + \gamma_2 q^{n+1} \right] + \alpha_2 \left[\gamma_1 a^n + \gamma_2 q^n \right] + \alpha_3 \left[\gamma_1 a^{n-1} + \gamma_2 q^{n-1} \right] = 0 \end{aligned} \quad (7.2.141)$$

$$\underline{M} \frac{q^{n+1} - q^n}{\Delta t} + \frac{1}{2} \left[\delta_1 a^{n+1} + \delta_2 q^{n+1} \right] + \frac{1}{2} \left[\delta_1 a^n + \delta_2 q^n \right] = 0 \quad (7.2.142)$$

donde Δt es el intervalo de tiempo de discretización; $n+1$, n y $n-1$ los niveles de tiempo futuro, presente y pasado respectivamente; α_1, α_2 y α_3 los factores de peso temporal, los cuales se propone utilizar de manera que se tenga





$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$ y $\alpha_1 = \alpha_3$. Las variables de simplificación γ_1 , γ_2 , δ_1 y δ_2 y los vectores de las variables de perturbación son:

$$\gamma_1 = -U_o^2(1 - F_r^{-2})\underline{A}_1 + F_1\underline{B}_1 \quad (7.2.143)$$

$$\gamma_2 = 2U_o\underline{A}_1 + (F_2 - G)\underline{B}_1 \quad (7.2.144)$$

$$\delta_1 = -U_o^2(1 - F_r^{-2})\underline{A}_2 + F_1\underline{B}_2 \quad (7.2.145)$$

$$\delta_2 = 2U_o\underline{A}_2 + F_2\underline{B}_2 \quad (7.2.146)$$

$$\underline{a}^n = \begin{bmatrix} a_{j-1}^n \\ a_j^n \\ a_{j+1}^n \end{bmatrix} \quad (7.2.147)$$

$$\underline{q}^n = \begin{bmatrix} q_{j-1}^n \\ q_j^n \\ q_{j+1}^n \end{bmatrix} \quad (7.2.148)$$

y los vectores \underline{M} , \underline{A}_1 , \underline{A}_2 , \underline{B}_1 y \underline{B}_2 se evalúan como:

$$\underline{M} = \frac{\Delta x}{6} [1 \quad 4 \quad 1] \quad (7.2.149)$$

$$\underline{A}_1 = \frac{1}{\Delta x} [-1 \quad 2 \quad -1] \quad (7.2.150)$$

$$\underline{A}_2 = \frac{1}{2} [-1 \quad 0 \quad 1] \quad (7.2.151)$$

$$\underline{B}_1 = \frac{1}{2} [1 \quad 0 \quad -1] \quad (7.2.152)$$

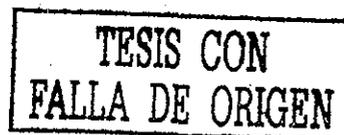
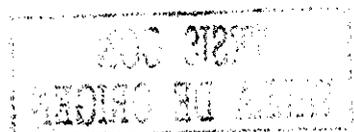
$$\underline{B}_2 = \frac{\Delta x}{6} [1 \quad 4 \quad 1] \quad (7.2.153)$$

7.2.7. Análisis de estabilidad

El sistema discreto (7.2.141) y (7.2.142), sujeto a apropiadas condiciones iniciales, constituye un problema discreto de valor inicial puro lineal y de coeficientes constantes. Por tanto, puede solucionarse aplicando una expansión en serie discreta de Fourier, en donde las componentes discretas de Fourier para el m -ésimo modo son

$$a_j^n = a(j \Delta x, n \Delta t; m) = \tilde{a}_m \rho_m^n e^{ikj \Delta x} \quad (7.2.154)$$

$$q_j^n = q(j \Delta x, n \Delta t; m) = \tilde{q}_m \rho_m^n e^{ikj \Delta x} \quad (7.2.155)$$





donde ρ_m^n , es el factor de amplificación del m -ésimo modo de Fourier; k el número de onda e $i = \sqrt{-1}$. Entonces, sustituyendo las componentes de la expansión en serie de Fourier (7.2.154) y (7.2.155), para un modo arbitrario de Fourier en la ecuación discretizada de la formulación GWCE (7.2.141), y desarrollando término a término:

Primer término:

$$\begin{aligned} \underline{M} \underline{a}^n &= \frac{\Delta x}{6} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{j-1}^n \\ a_j^n \\ a_{j+1}^n \end{bmatrix} \\ &= \hat{a} \rho^n e^{ikj\Delta x} \frac{\Delta x}{3} [\cos(k\Delta x) + 2] \end{aligned} \quad (7.2.156)$$

Segundo término:

$$\begin{aligned} \gamma_1 \underline{a}^n &= -\frac{U_o^2}{\Delta x} (1 - F_r^{-2}) \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{j-1}^n \\ a_j^n \\ a_{j+1}^n \end{bmatrix} + \frac{F_1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{j-1}^n \\ a_j^n \\ a_{j+1}^n \end{bmatrix} \\ &= \hat{a} \rho^n e^{ikj\Delta x} \left[-\frac{2U_o^2}{\Delta x} (1 - F_r^{-2}) (1 - \cos(k\Delta x)) - iF_1 \text{sen}(k\Delta x) \right] \end{aligned} \quad (7.2.157)$$

Tercer término:

$$\begin{aligned} \gamma_2 \underline{q}^n &= -\frac{2U_o}{\Delta x} \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{j-1}^n \\ q_j^n \\ q_{j+1}^n \end{bmatrix} + \frac{(F_2 - G)}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{j-1}^n \\ q_j^n \\ q_{j+1}^n \end{bmatrix} \\ &= \hat{q} \rho^n e^{ikj\Delta x} \left[-\frac{4U_o}{\Delta x} (1 - \cos(k\Delta x)) - i(F_2 - G) \text{sen}(k\Delta x) \right] \end{aligned} \quad (7.2.158)$$

Entonces, al sustituir las ecuaciones (7.2.156)-(7.2.158) en (7.2.141), y agrupando

$$\begin{aligned} &\rho^n e^{ikj\Delta x} \left\{ \hat{a} \left[\rho^2 \left[(2 + G\Delta t)(c + 2) + 6\alpha_1 \left[-2U_o^2 \lambda^2 (1 - F_r^{-2})(1 - c) - iF_1 \Delta t s \right] \right] + \right. \right. \\ &\quad \left. \left[-4(c + 2) + 6\alpha_2 \left[-2U_o^2 \lambda^2 (1 - F_r^{-2})(1 - c) - iF_1 \Delta t s \right] \right] + \right. \\ &\quad \left. \left[(2 - G\Delta t)(c + 2) + 6\alpha_3 \left[-2U_o^2 \lambda^2 (1 - F_r^{-2})(1 - c) - iF_1 \Delta t s \right] \right] \right] + \\ &\quad \hat{q} \left[\rho^2 6\alpha_1 \left[4U_o \lambda^2 (1 - c) - i(F_2 - G) \Delta t s \right] + \rho 6\alpha_2 \left[4U_o \lambda^2 (1 - c) - i(F_2 - G) \Delta t s \right] + \right. \\ &\quad \left. 6\alpha_3 \left[4U_o \lambda^2 (1 - c) - i(F_2 - G) \Delta t s \right] \right] \left. \right\} = 0 \end{aligned} \quad (7.2.159)$$

En la ecuación anterior se ha considerado utilizar $c \equiv \cos(k\Delta x)$, $s \equiv \text{sen}(k\Delta x)$ y $\lambda = \Delta t / \Delta x$, con el fin de mantener una notación más compacta.



Considerando que los valores de los factores de peso temporal sean $\alpha_1 = \alpha_3 = 1/4$ y $\alpha_2 = 1/2$ (Luettich, *et al.*, 1992), entonces la ecuación (7.2.159) se puede escribir de la forma siguiente:

$$\rho^n e^{ikj\Delta x} \left\{ \hat{\alpha} \left[G\Delta t(c+2)(\rho^2 - 1) + 2(c+2)(\rho - 1)^2 + \eta_1(\rho + 1)^2 \right] + \hat{q} \eta_2(\rho + 1)^2 \right\} = 0 \quad (7.2.160)$$

En esta ecuación se ha considerado introducir dos variables simplificatorias η_1 y η_2 , que agrupan a los siguientes términos

$$\eta_1 = \frac{3}{2} \left[-2U_o^2(1 - F_r^{-2})\lambda^2(1 - c) - iF_1\Delta t\lambda s \right] \quad (7.2.161)$$

$$\eta_2 = \frac{3}{2} \left[4U_o\lambda^2(1 - c) - i(F_2 - G)\Delta t\lambda s \right] \quad (7.2.162)$$

En forma similar, sustituyendo las expansiones en serie discreta de Fourier (7.2.154) y (7.2.155) en la ecuación de cantidad de movimiento discreta (7.2.142), y desarrollando término a término:

Primer término:

$$\begin{aligned} \underline{M} \underline{q}^n &= \frac{\Delta x}{6} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{j-1}^n \\ q_j^n \\ q_{j+1}^n \end{bmatrix} \\ &= \hat{q} \rho^n e^{ikj\Delta x} \frac{\Delta x}{3} [\cos(k\Delta x) + 2] \end{aligned} \quad (7.2.163)$$

Segundo término:

$$\begin{aligned} \delta_1 \underline{a}^n &= -\frac{U_o^2}{2} (1 - F_r^{-2}) \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{j-1}^n \\ a_j^n \\ a_{j+1}^n \end{bmatrix} + \frac{F_1\Delta x}{6} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{j-1}^n \\ a_j^n \\ a_{j+1}^n \end{bmatrix} \\ &= \hat{\alpha} \rho^n e^{ikj\Delta x} \left[-iU_o^2(1 - F_r^{-2}) \text{sen}(k\Delta x) + \frac{F_1\Delta x}{3} (\cos(k\Delta x) + 2) \right] \end{aligned} \quad (7.2.164)$$

Tercer término:

$$\begin{aligned} \delta_2 \underline{q}^n &= 2U_o \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{j-1}^n \\ q_j^n \\ q_{j+1}^n \end{bmatrix} + \frac{F_1\Delta x}{6} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{j-1}^n \\ q_j^n \\ q_{j+1}^n \end{bmatrix} \\ &= \hat{\alpha} \rho^n e^{ikj\Delta x} \left[4iU_o \text{sen}(k\Delta x) + \frac{F_1\Delta x}{3} (\cos(k\Delta x) + 2) \right] \end{aligned} \quad (7.2.165)$$

Sustituyendo las ecuaciones (7.2.163)-(7.2.165) en la ecuación (7.2.142), y agrupando

$$\rho^n e^{ikj\Delta x} \left\{ \hat{\alpha} \eta_4(\rho + 1) + \hat{q} [(c+2)(\rho - 1) + \eta_3(\rho + 1)] \right\} = 0 \quad (7.2.166)$$





Además, se tienen las variables simplificatorias η_3 y η_4 , que agrupan a las siguientes variables

$$\eta_3 = \frac{3}{2} \left[-iU_o^2(1 - F_r^{-2})\lambda_s + \frac{F_1\Delta t}{3}(c + 2) \right] \quad (7.2.167)$$

$$\eta_4 = \frac{3}{2} \left[4iU_o\lambda_s + \frac{F_2\Delta t}{3}(c + 2) \right] \quad (7.2.168)$$

Aplicando las ecuaciones (5.4.13) y (5.4.14) para evaluar las variables F_1 y F_2 en las variables simplificatorias η_1 , η_2 , η_3 y η_4 , y desarrollando, se tiene que las ecuaciones (7.2.161), (7.2.162), (7.2.167) y (7.2.168) se pueden escribir de la forma siguiente:

$$\eta_1 = 3 \left[-U_o^2(1 - F_r^{-2})\lambda^2(1 - c) + iI \left(1 + \frac{V_e}{F_r} \right) \lambda_s \right] \quad (7.2.169)$$

$$\eta_2 = \frac{3}{2} \left[4U_o\lambda^2(1 - c) - i \left(\frac{2I}{U_o} - G\Delta t \right) \lambda_s \right] \quad (7.2.170)$$

$$\eta_3 = \frac{3}{2} \left[-iU_o^2(1 - F_r^{-2})\lambda_s - \frac{2}{3}I \left(1 + \frac{V_e}{F_r} \right) (c + 2) \right] \quad (7.2.171)$$

$$\eta_4 = \frac{3}{2} \left[4iU_o\lambda_s + \frac{2}{3} \frac{I}{U_o} (c + 2) \right] \quad (7.2.172)$$

En las ecuaciones anteriores se considera que $I = gS_f\Delta t$ como un término de fricción, y $V_e = \frac{2}{3} \frac{A_o}{R_o} \frac{dR}{dA} \Big|_{A_o} F_r$, como el número de Vedernikov.

Por otra parte, reordenando la ecuaciones (7.2.160) y (7.2.166) en forma matricial

$$\rho^n e^{ikj\Delta x} \begin{bmatrix} G\Delta t(c + 2)(\rho^2 + 1) + 2(c + 2)(\rho - 1)^2 & \eta_2(\rho + 1)^2 \\ + \eta_1(\rho + 1)^2 & \\ \eta_4(\rho + 1) & (c + 2)(\rho - 1) + \eta_3(\rho + 1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7.2.173)$$

MUSEO DE LA CIENCIA
MUSEO DE LA ALFABETIZACIÓN

TESIS CON FALLA DE ORIGEN



Resolviendo el determinante de coeficientes anterior e igualando a cero de forma que

$$\left[G\Delta t(c+2)(\rho^2 - 1) + 2(c+2)(\rho - 1)^2 + \eta_1(\rho + 1)^2 \right] \left[(c+2)(\rho - 1) + \eta_3(\rho + 1) \right] - \eta_2\eta_4(\rho + 1)^3 = 0 \quad (7.2.174)$$

y la relación de dispersión de la ecuación del sistema (7.2.160) y (7.2.166) es:

$$\rho = \begin{cases} \sqrt[3]{A_1} - A_2 - \frac{ab}{3} \\ \frac{1}{2} \left[-\sqrt[3]{A_1} + A_2 \pm i\sqrt{3}(\sqrt[3]{A_1} + A_2) \right] - \frac{ab}{3} \end{cases} \quad (7.2.175)$$

donde las variables simplificatorias A_1 , A_2 , a , b y c son

$$A_1 = \frac{bc}{a^2} - \frac{d}{2a} - \left(\frac{b}{3a} \right)^3 + \frac{\sqrt{3}}{18a^2} \left\{ a[27ad^2 + 2c^2(2c - 9bd)] + b^2(4bd - c^2) \right\} \quad (7.2.176)$$

$$A_2 = \frac{1}{3} \frac{\frac{c}{a} - \frac{1}{3} \left(\frac{b}{a} \right)^2}{\sqrt[3]{A_1}} \quad (7.2.177)$$

$$a = [(c+2)(2 + G\Delta t) + \eta_1] (c+2 + \eta_3) - \eta_2\eta_4 \quad (7.2.178)$$

$$b = 2(\eta_1 - 2c + 4)(c+2 + \eta_3) + [(c+2)(2 + G\Delta t) + \eta_1] (-c - 2 + \eta_3) - 3\eta_2\eta_4 \quad (7.2.179)$$

$$c = 2(\eta_1 - 2c + 4)(-c - 2 + \eta_3) + [(c+2)(2 - G\Delta t) + \eta_1] (c+2 + \eta_3) - 3\eta_2\eta_4 \quad (7.2.180)$$

$$d = [(c+2)(2 - G\Delta t) + \eta_1] (-c - 2 + \eta_3) - \eta_2\eta_4 \quad (7.2.181)$$

La condición de estabilidad estricta del esquema se cumple para un valor de $|\rho| \leq 1$. Entonces, aplicando esta condición límite de estabilidad a las relación de dispersión (7.2.175), se tiene

$$|\rho| = \begin{cases} \left| \sqrt[3]{A_1} - A_2 - \frac{ab}{3} \right| \leq 1 \\ \left| \frac{1}{2} \left[-\sqrt[3]{A_1} + A_2 \pm i\sqrt{3}(\sqrt[3]{A_1} + A_2) \right] - \frac{ab}{3} \right| \leq 1 \end{cases} \quad \forall m \quad (7.2.182)$$

La inecuación (7.2.182) es la condición de estabilidad límite del esquema discretizado por la metodología de elemento finito de la formulación GWCE y cantidad de movimiento de las ecuaciones de flujo a superficie libre de Saint-Venant en su versión conservativa diferencial. Debido a que no es posible





determinar una forma explícita de la condición de estabilidad límite, en el siguiente subcapítulo se presentarán los retratos de la relación de dispersión (7.2.175) para diferentes condiciones de flujo y diversos valores del número de Courant, así como del término de filtrado G . Con los resultados de estos retratos de amplitud se pueden conocer en forma gráfica los rangos de aplicación de este esquema.

7.2.8. Elaboración de retratos de amplitud y fase

Para la graficación de los retratos de amplitud y fase de la relación de dispersión del esquema en elemento finito, de la formulación GWCE y cantidad de movimiento conservativa (ecuación 7.2.175), y con el fin de tener una secuencia rápida de localización de cada lámina se propone la siguiente clasificación:

a) Retratos de amplitud que tienen una semejanza con las condiciones de flujo de las que se hará uso en las pruebas numéricas del subcapítulo 7.2.9.2.

a.1) Condición de flujo subcrítico:

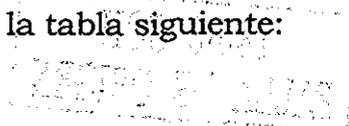
Los parámetros de topología y flujo del canal por analizar están definidos en la tabla 5.1 y la secuencia de los retratos de amplitud (tabla 7.1) se considera una variación del factor de filtrado G . Para diversos valores del número de Courant $C_r = \{0.01, 0.11, 2, 5, 10, 30, 50, 75, 150\}$, tal como se muestra en la tabla 7.1.

Nombre de identificación del retrato de amplitud	Factor de Filtrado G
Ret_amp_Fs01Gw	1
Ret_amp_Fs02Gw	10
Ret_amp_Fs03Gw	100

Tabla 7.1. Clasificación de los retratos de amplitud para flujo subcrítico de la formulación GWCE.

a.2) Condición de flujo supercrítico

Para el caso supercrítico se consideran los datos de condición inicial definidos en la tabla 5.3 y los mismos valores del término de filtrado y de número de Courant, entonces la secuencia de identificación los retratos de amplitud se pueden ver en la tabla siguiente:



TESIS CON FALLA DE ORIGEN



Nombre de identificación del retrato de amplitud	Factor de Filtrado G
Ret_amp_Ft01Gw	1
Ret_amp_Ft02Gw	10
Ret_amp_Ft03Gw	100

Tabla 7.2. Clasificación de los retratos de amplitud para flujo supercrítico de la formulación GWCE.

b) En las láminas de la relación entre la fase numérica (relación de dispersión 7.2.175) y la fase continua (relación de dispersión 7.1.62), se presentarán los resultados, considerados éstos exclusivamente para las condiciones de flujo en que se realizaron las pruebas numéricas, las cuales quedan definidas en las tablas 7.3. y 7.4.

b.1) Condición de flujo subcrítico:

La secuencia de los retratos de amplitud (tabla 7.3) se considera una variación del factor de filtrado G. Para diversos valores del número de Courant $C_r = \{0.01, 0.11, 2, 5, 10, 30, 50, 75, 150\}$.

Nombre de identificación del retrato de amplitud	Factor de Filtrado G
Ret_fas_Fs01Gw	1
Ret_fas_Fs02Gw	10
Ret_fas_Fs03Gw	100

Tabla 7.3. Clasificación de los retratos de fase para flujo subcrítico de la formulación GWCE.

b.2) Condición de flujo supercrítico

Nombre de identificación del retrato de amplitud	Factor de Filtrado G
Ret_fas_Ft01Gw	1
Ret_fas_Ft02Gw	10
Ret_fas_Ft03Gw	100

Tabla 7.4. Clasificación de los retratos de fase para flujo supercrítico de la formulación GWCE.



TESIS CON FALLA DE ORIGEN

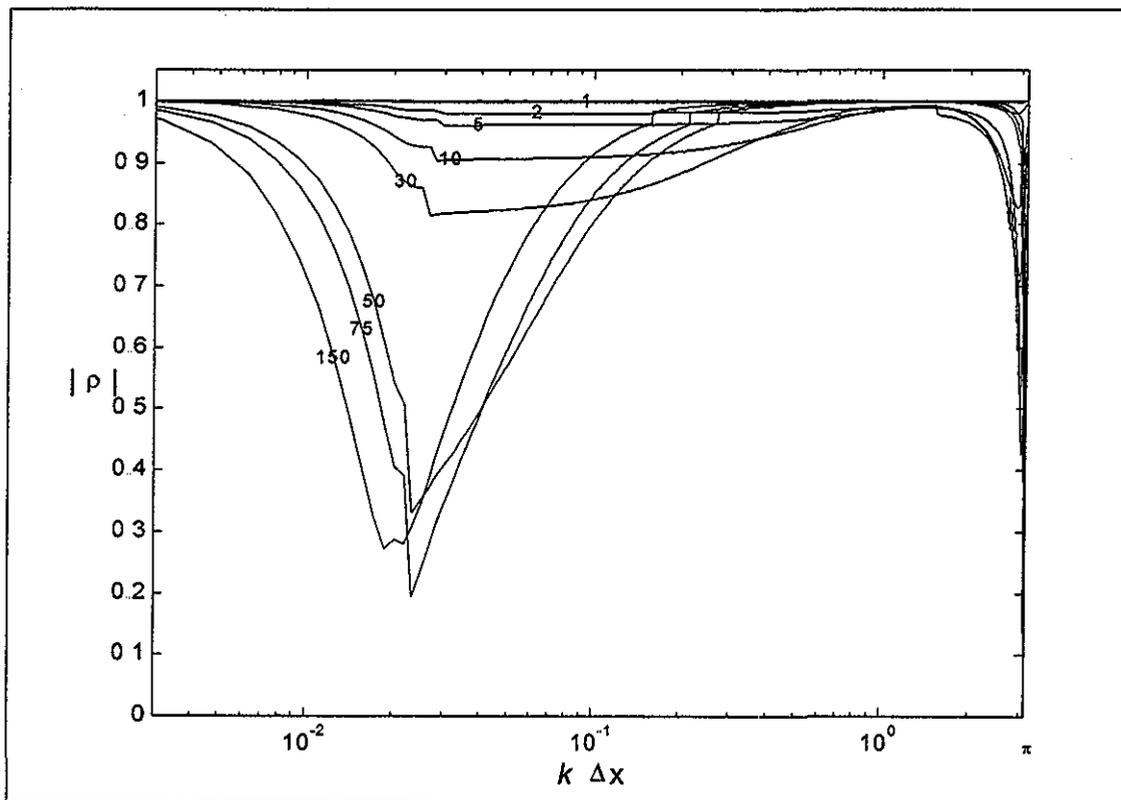


Lámina 7.3. CasoRet_amp_Fs01Gw.

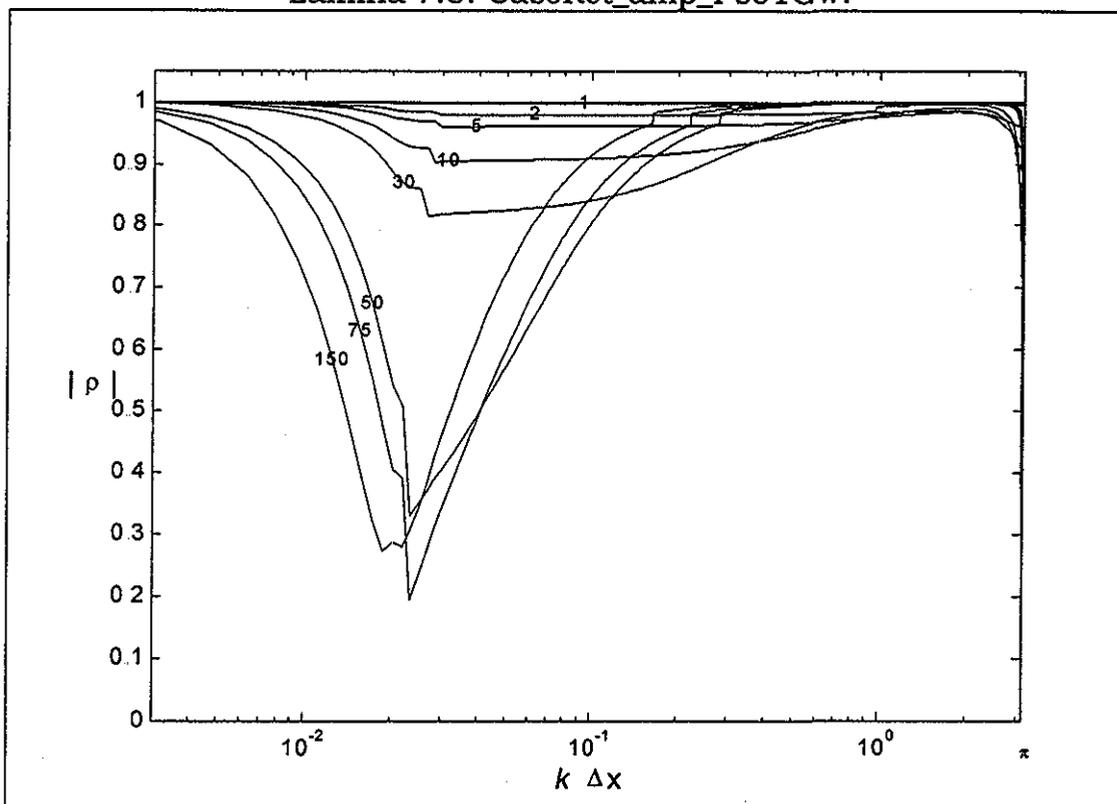


Lámina 7.4. CasoRet_amp_Fs02Gw.

EST. UNIV.
MEXICO

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

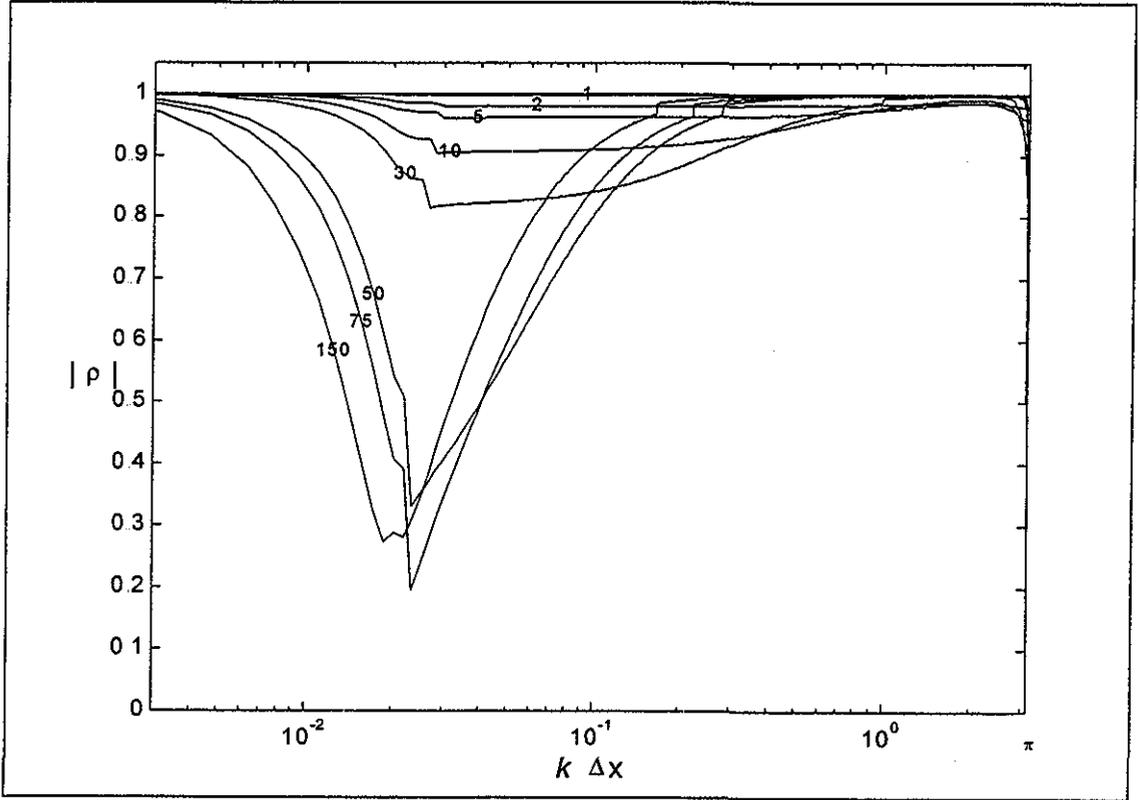


Lámina 7.5. CasoRet_amp_Fs03Gw.

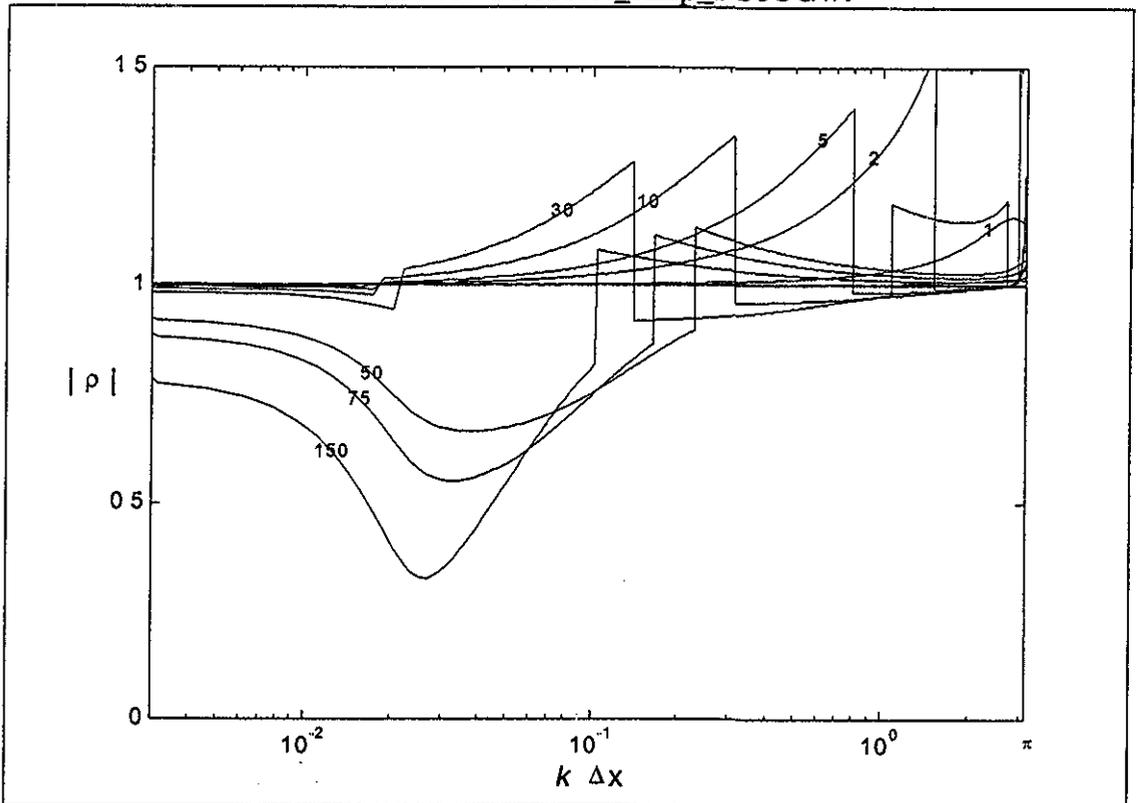


Lámina 7.6. CasoRet_amp_Ft01Gw.

100 REPT
MAYO 19 1988

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

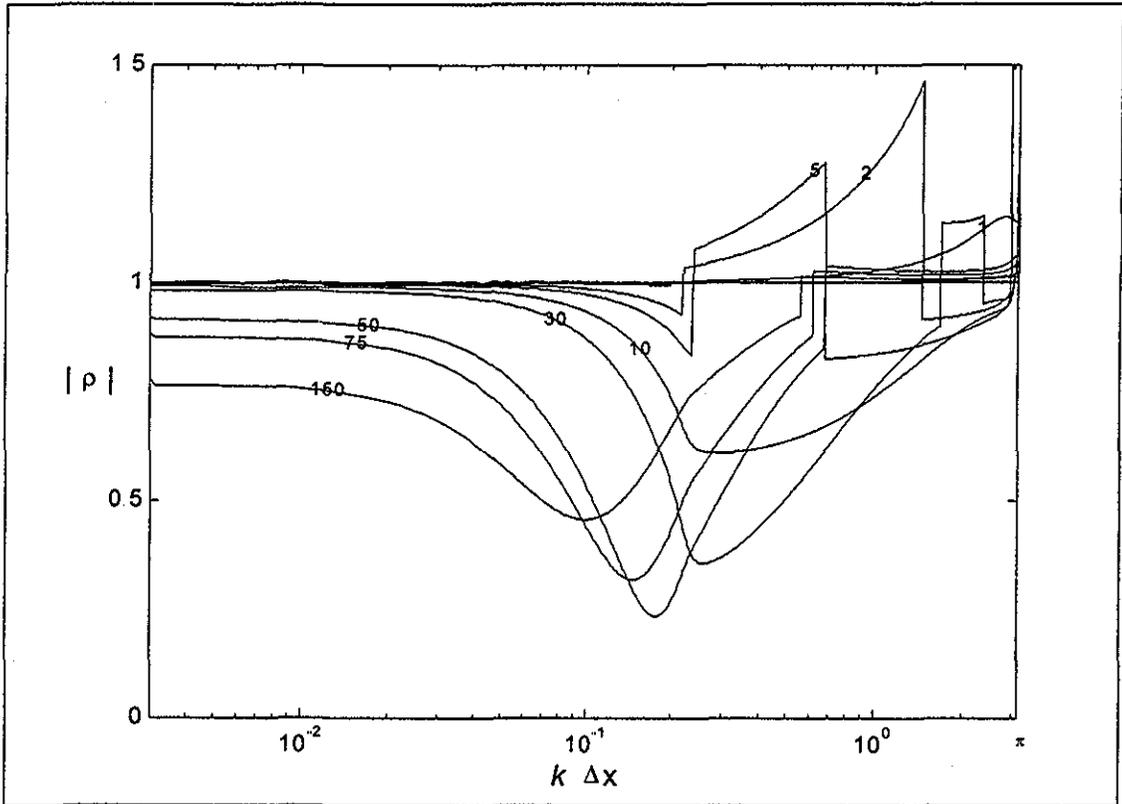


Lámina 7.7. CasoRet_amp_Ft02Gw.

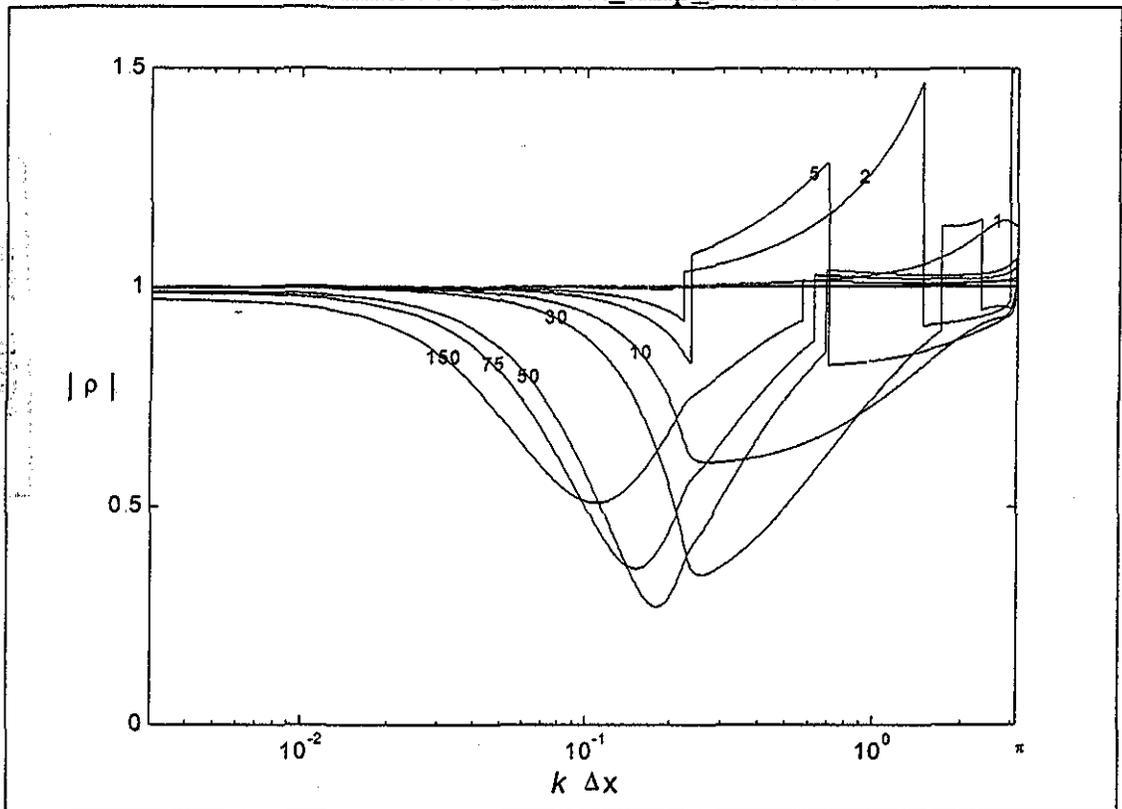


Lámina 7.8. CasoRet_amp_Ft03Gw.

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

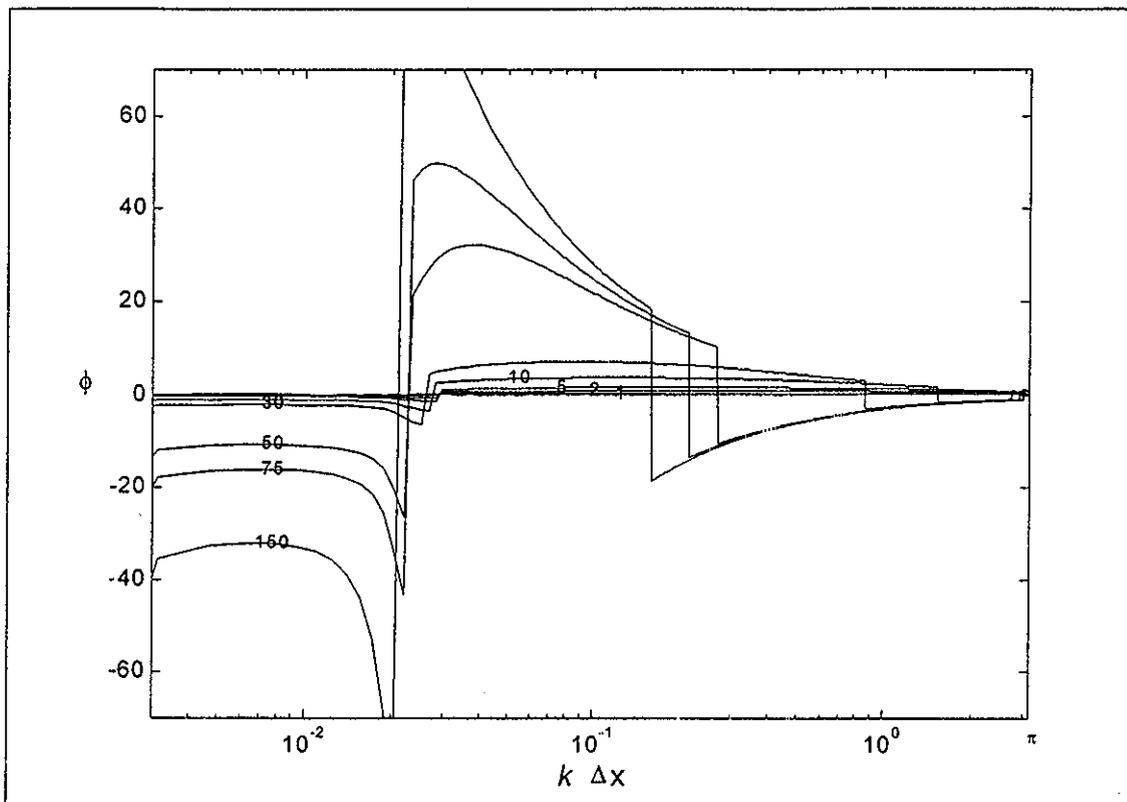


Lámina 7.9. CasoRet_fas_Fs01Gw.

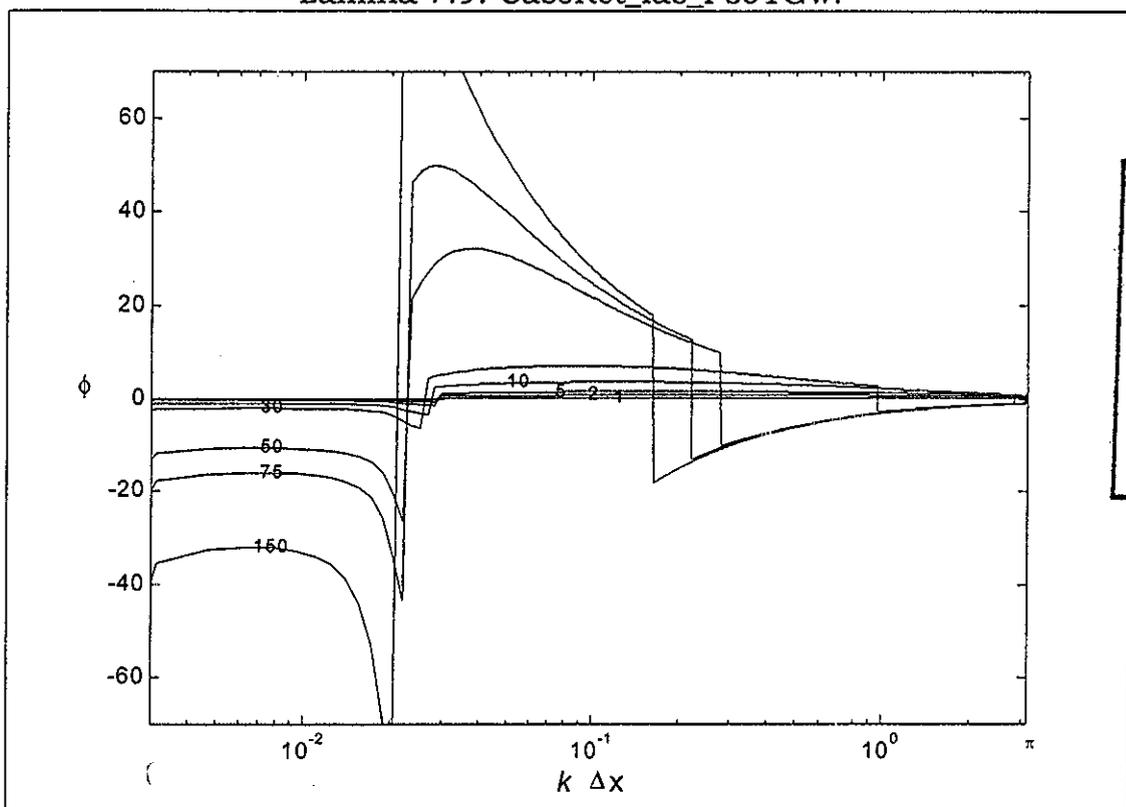


Lámina 7.10. CasoRet_fas_Fs02Gw.

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA
FACULTAD DE INGENIERIA

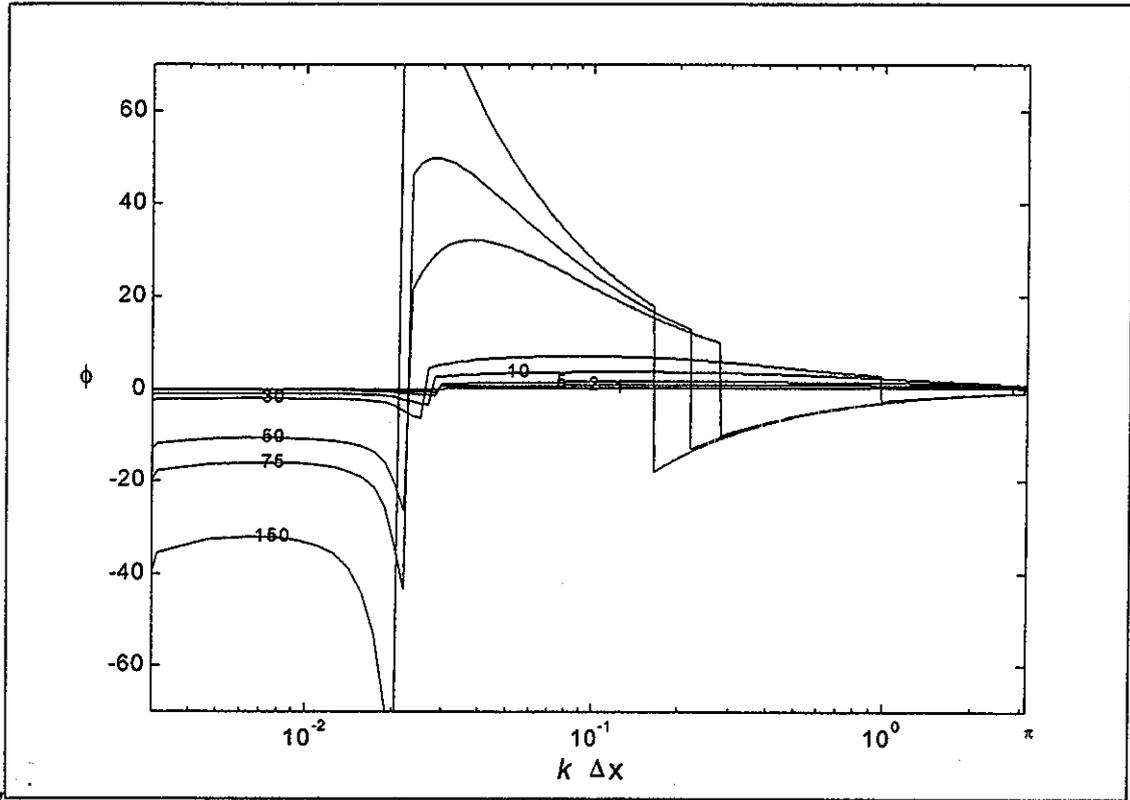


Lámina 7.11. CasoRet_fas_Fs03Gw.

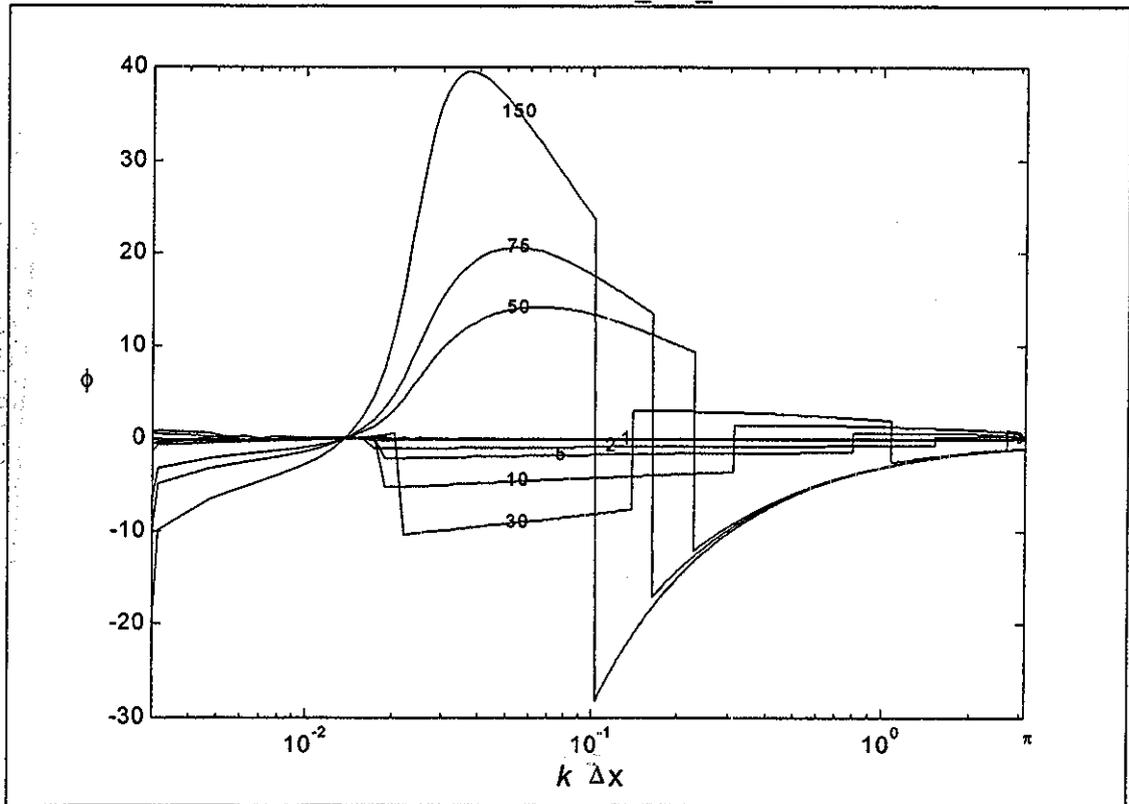


Lámina 7.12. CasoRet_fas_Ft01Gw.

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

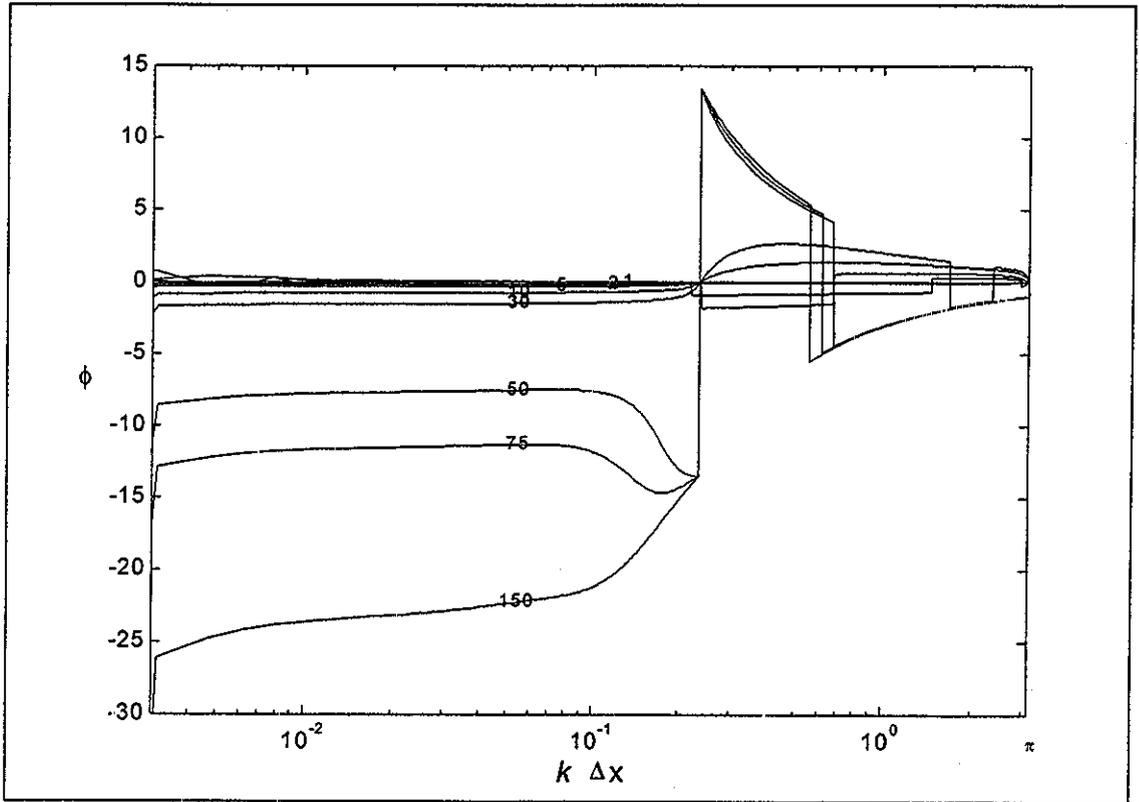


Lámina 7.13. CasoRet_fas_Ft02Gw.

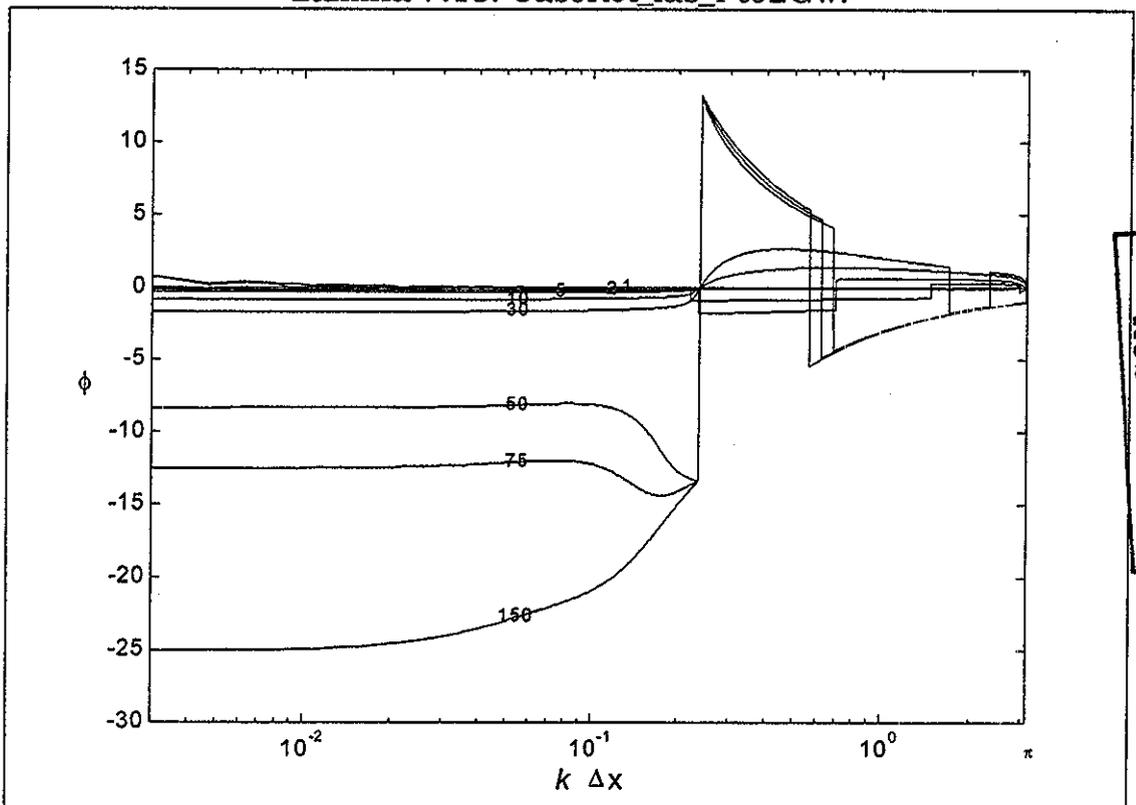


Lámina 7.14. CasoRet_fas_Ft03Gw.

TESIS DE ORIGEN
REPOSICIONADO
MAYO 2008

TESIS CON
FALTA DE ORIGEN



7.2.9. Pruebas numéricas

7.2.9.1. Programación del esquema

Para construir el algoritmo de solución de la formulación GWCE (7.6) y cantidad de movimiento (2.3.53) se tiene que modificar la forma como se maneja el término convectivo, lo cual permite generar un código de programación adecuado para ser utilizado en la computadora. Entonces, el término convectivo se manejará de la forma siguiente:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{A} \right) = 2 \frac{Q}{A} \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{Q^2}{A^2} \frac{\partial A}{\partial x} \quad (7.2.183)$$

Para el término que evalúa la elevación de la superficie libre del agua desde un nivel de referencia, se considera de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h(A; x, t)}{\partial x} &= \frac{\partial y(A; x, t)}{\partial x} + \frac{\partial z(x)}{\partial x} \\ &= \frac{\partial y(A; x, t)}{\partial \bar{A}} \frac{\partial \bar{A}}{\partial x} - S_b(x) = \frac{1}{B(A; x, t)} \frac{\partial A}{\partial x} - S_b(x) \end{aligned} \quad (7.2.184)$$

donde $B(A; x, t)$ es el ancho de la superficie del agua en la sección transversal y $S_b(x)$ es la pendiente longitudinal del fondo del canal.

Al considerar esta forma del término convectivo y el término de variación de la superficie libre del agua (ecuaciones 7.2.183 y 7.2.184) y sustituyéndolos en el sistema de ecuaciones a solucionar (7.6) y (2.3.53), se tiene

$$\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + G \frac{\partial A}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{2Q}{A} \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial x} \left(g \frac{A}{B} - \frac{Q^2}{A^2} \right) + g A (S_f - S_b) - G Q \right] = 0 \quad (7.2.185)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{2Q}{A} \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial x} \left(g \frac{A}{B} - \frac{Q^2}{A^2} \right) + g A (S_f - S_b) = 0 \quad (7.2.186)$$

Para desarrollar la forma residual pesada de Galerkin, se sigue un procedimiento similar al desarrollado en el subcapítulo (7.2.1). Entonces la formulación residual pesada de (7.2.185) es

$$\left\langle \frac{\partial^2 A}{\partial t^2}, \delta u \right\rangle_{\Omega} + \left\langle G \frac{\partial A}{\partial t}, \delta u \right\rangle_{\Omega} - \left\langle \frac{\partial \xi(A, Q; x, t)}{\partial x}, \delta u \right\rangle_{\Omega} = 0 \quad (7.2.187)$$

donde:



$$\xi(A, Q; x, t) = 2 \frac{Q}{A} \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial x} \left(g \frac{A}{B} + \frac{Q^2}{A^2} \right) + g A (S_f - S_b) - G Q \quad (7.2.188)$$

Aplicando una integración por partes en la ecuación (7.2.187), al término con derivada espacial se tiene:

$$\left\langle \frac{\partial^2 A}{\partial t^2}, \delta u \right\rangle_{\Omega} + \left\langle G \frac{\partial A}{\partial t}, \delta u \right\rangle_{\Omega} + \left\langle \xi(A, Q; x, t), \frac{\partial \delta u}{\partial x} \right\rangle_{\Omega} - [\xi(A, Q; x, t), \delta u]_{\Gamma} = 0 \quad (7.2.189)$$

De la ecuación (7.2.186) se puede deducir que

$$\xi = -\frac{\partial Q}{\partial t} - G Q \quad (7.2.190)$$

Sustituyendo la relación anterior en la formulación residual pesada (7.2.189), de forma que

$$\begin{aligned} & \left\langle \frac{\partial^2 A}{\partial t^2}, \delta u \right\rangle_{\Omega} + \left\langle G \frac{\partial A}{\partial t}, \delta u \right\rangle_{\Omega} + \left\langle 2 \frac{Q}{A} \frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial \delta u}{\partial x} \right\rangle_{\Omega} + \left\langle \left(g \frac{A}{B} - \frac{Q^2}{A^2} \right) \frac{\partial A}{\partial x}, \frac{\partial \delta u}{\partial x} \right\rangle_{\Omega} \\ & + \left\langle g(S_f - S_b)A, \frac{\partial \delta u}{\partial x} \right\rangle_{\Omega} + \left\langle G Q, \frac{\partial \delta u}{\partial x} \right\rangle_{\Omega} + \left[\frac{df(t)}{dt} + Gf(t) \right]_{\Gamma_N} = 0 \end{aligned} \quad (7.2.191)$$

la condición de frontera natural (ecuaciones 2.3.58 o 2.3.50) es diferente de cero solamente en la frontera donde se especifique entrada o salida de flujo (Γ_N).

Además, la formulación residual pesada de la ecuación de cantidad de movimiento (7.2.186) se construye de la forma siguiente:

$$\left\langle \frac{\partial Q}{\partial t}, \delta u \right\rangle_{\Omega} + \left\langle 2 \frac{Q}{A} \frac{\partial Q}{\partial x}, \delta u \right\rangle_{\Omega} + \left\langle \left(g \frac{A}{B} - \frac{Q^2}{A^2} \right) \frac{\partial A}{\partial x}, \delta u \right\rangle_{\Omega} + \left\langle g(S_f - S_b)A, \delta u \right\rangle_{\Omega} = 0 \quad (7.2.192)$$

Para la discretización espacial se requiere que las funciones de interpolación tengan al menos una continuidad funcional C^0 , para las variables dependientes $A(x, t)$ y $Q(x, t)$, que serán aproximadas sobre cada elemento l , y su valor será nulo en cualquier otro lugar. Entonces:

$$A \cong \sum_{l=1}^{\#el} \hat{A}^{(l)} = \sum_{l=1}^{\#el} \underline{\phi}^{(l)} \underline{A}^{(l)} = \sum_{l=1}^{\#el} \left[\phi_1^{(l)} \phi_2^{(l)} \dots \right] \begin{bmatrix} A_1^{(l)} \\ A_2^{(l)} \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (7.2.193)$$

donde $\underline{\phi}^{(l)}$ es un vector que contiene las funciones de interpolación, siendo cero fuera del elemento (l) y $\underline{A}^{(l)}$ es un vector que contiene los datos elementales conocidos.

Para las demás variables dependientes tenemos:



$$Q \cong \sum_{l=1}^{\#el} \hat{Q}^{(l)} = \sum_{l=1}^{\#el} \underline{\phi}^{(l)} \underline{Q}^{(l)} \quad (7.2.194)$$

$$\begin{aligned} \frac{Q}{A} &\cong \sum_{l=1}^{\#el} \left(\frac{\hat{Q}}{\hat{A}} \right)^{(l)} = \sum_{l=1}^{\#el} \underline{\phi}^{(l)} \left(\frac{Q}{A} \right)^{(l)} \\ &= \sum_{l=1}^{\#el} \underline{\phi}^{(l)} \underline{I}^{(l)} \end{aligned} \quad (7.2.195)$$

$$\begin{aligned} g \frac{A}{B} - \frac{Q^2}{A^2} &\cong \sum_{l=1}^{\#el} \left(g \frac{\hat{A}}{\hat{B}} - \frac{\hat{Q}^2}{\hat{A}^2} \right)^{(l)} = \sum_{l=1}^{\#el} \underline{\phi}^{(l)} \left(g \frac{A}{B} - \frac{Q^2}{A^2} \right)^{(l)} \\ &= \sum_{l=1}^{\#el} \underline{\phi}^{(l)} \underline{II}^{(l)} \end{aligned} \quad (7.2.196)$$

$$\begin{aligned} S_f - S_b &\cong \sum_{l=1}^{\#el} (\hat{S}_f - \hat{S}_b)^{(l)} = \sum_{l=1}^{\#el} \underline{\phi}^{(l)} (S_f - S_b)^{(l)} \\ &= \sum_{l=1}^{\#el} \underline{\phi}^{(l)} \underline{III}^{(l)} \end{aligned} \quad (7.2.197)$$

Seleccionado la formulación de Galerkin para la aproximación de la función de interpolación

$$\delta u \cong \sum_{l=1}^{\#el} \hat{\delta u}^{(l)} = \sum_{l=1}^{\#el} \underline{\phi}^{(l)} \delta u^{(l)} \quad (7.2.198)$$

Sustituyendo las ecuaciones (7.2.193)-(7.2.198) en (7.2.191) y (7.2.192); considerando el reacomodo matricial (7.2.18), tomando además un elemento arbitrario dentro del dominio de solución, se tiene

$$\sum_{l=1}^{\#el} \hat{\delta u}^{(l)} \left[\mathbf{M}^{(l)} \frac{\partial^2 \underline{A}^{(l)}}{\partial t^2} + G \mathbf{M}^{(l)} \frac{\partial \underline{A}^{(l)}}{\partial t} + \mathbf{A}_1^{(l)} \underline{Q}^{(l)} + \mathbf{B}_1^{(l)} \underline{A} + \underline{P}_1^{(l)} \right] = 0 \quad (7.2.199)$$

$$\sum_{l=1}^{\#el} \hat{\delta u}^{(l)} \left[\mathbf{M}^{(l)} \frac{\partial \underline{Q}^{(l)}}{\partial t} + \mathbf{A}_2^{(l)} \underline{Q}^{(l)} + \mathbf{B}_2^{(l)} \underline{A} \right] = 0 \quad (7.2.200)$$

donde las matrices $\mathbf{M}^{(l)}$, $\mathbf{A}_1^{(l)}$, $\mathbf{A}_2^{(l)}$, $\mathbf{B}_1^{(l)}$, $\mathbf{B}_2^{(l)}$ y el vector $\underline{P}_1^{(l)}$ son:

$$\mathbf{M}^{(l)} = \int_{\Omega_{el}} \underline{\phi}^T \underline{\phi} d\Omega \quad (7.2.201)$$

$$\mathbf{A}_1^{(l)} = \int_{\Omega_{el}} \left(2 \frac{\partial \underline{\phi}^T}{\partial x} \underline{\phi} \underline{I}^{(l)} \frac{\partial \underline{\phi}}{\partial x} - G \frac{\partial \underline{\phi}^T}{\partial x} \underline{\phi} \right) d\Omega \quad (7.2.202)$$



$$\mathbf{A}_2^{(l)} = \int_{\Omega_{el}} \underline{\phi}^T \underline{\phi} \underline{I}^{(l)} \frac{\partial \phi}{\partial x} d\Omega \quad (7.2.203)$$

$$\mathbf{B}_1^{(l)} = \int_{\Omega_{el}} \left(\frac{\partial \underline{\phi}^T}{\partial x} \underline{\phi} \underline{II}^{(l)} \frac{\partial \phi}{\partial x} + g \frac{\partial \underline{\phi}^T}{\partial x} \underline{\phi} \underline{III}^{(l)} \underline{\phi} \right) d\Omega \quad (7.2.204)$$

$$\mathbf{B}_2^{(l)} = \int_{\Omega_{el}} \left(\underline{\phi}^T \underline{\phi} \underline{II}^{(l)} \frac{\partial \phi}{\partial x} + g \underline{\phi}^T \underline{\phi} \underline{III}^{(l)} \underline{\phi} \right) d\Omega \quad (7.2.205)$$

$$\underline{P}_1^{(l)} = \left[\underline{\phi}^T \left(\frac{df(t)}{dt} + G f(t) \right) \right]_{\Gamma_N} \quad (7.2.206)$$

Las funciones de interpolación ϕ son lineales dentro del dominio de solución, y se considerarán en forma similar a las definidas por el vector (7.2.32). Entonces, las matrices (7.2.201)-(7.2.206) se evalúan como

$$\mathbf{M}^{(l)} = \frac{\Delta x}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (7.2.207)$$

$$\mathbf{A}_1^{(l)} = \frac{1}{\Delta x} \begin{bmatrix} I_l + I_{l+1} + \frac{G\Delta x}{2} & -I_l - I_{l+1} + \frac{G\Delta x}{2} \\ -I_l - I_{l+1} - \frac{G\Delta x}{2} & I_l + I_{l+1} - \frac{G\Delta x}{2} \end{bmatrix} \quad (7.2.208)$$

$$\mathbf{A}_2^{(l)} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -2I_l - I_{l+1} & 2I_l + I_{l+1} \\ -I_l - 2I_{l+1} & I_l + 2I_{l+1} \end{bmatrix} \quad (7.2.209)$$

$$\mathbf{B}_1^{(l)} = \frac{1}{6\Delta x} \begin{bmatrix} -3(II_l + II_{l+1}) + g\Delta x(2III_l + III_{l+1}) & 3(II_l + II_{l+1}) + g\Delta x(III_l + 2III_{l+1}) \\ -3(II_l + II_{l+1}) + g\Delta x(2III_l + III_{l+1}) & 3(II_l + II_{l+1}) + g\Delta x(III_l + 2III_{l+1}) \end{bmatrix} \quad (7.2.210)$$

$$\mathbf{B}_2^{(l)} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -II_l - 2II_{l+1} - g(III_l + 2III_{l+1}) & II_l + 2II_{l+1} - g(2III_l + III_{l+1}) \\ -2II_l - II_{l+1} + g(III_l + 2III_{l+1}) & 2II_l + II_{l+1} + g(2III_l + III_{l+1}) \end{bmatrix} \quad (7.2.211)$$

$$\underline{P}_1^{(l)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \left[\frac{df}{dt} + G f \right]_{\Gamma_N} \quad (7.2.212)$$

realizando el ensamblado global de la matrices (7.2.207)-(7.2.212), de forma que

$$\mathbf{M} = \frac{\Delta x}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (7.2.213)$$

$$\mathbf{A}_1 = \frac{1}{\Delta x} \begin{bmatrix} I_{j-1} + I_j + \frac{G\Delta x}{2} & -I_{j-1} - I_j + \frac{G\Delta x}{2} & 0 \\ -I_{j-1} - I_j - \frac{G\Delta x}{2} & I_{j-1} + 2I_j + I_{j+1} & -I_j - I_{j+1} + \frac{G\Delta x}{2} \\ 0 & -I_j - I_{j+1} - \frac{G\Delta x}{2} & I_j + I_{j+1} - \frac{G\Delta x}{2} \end{bmatrix} \quad (7.2.214)$$



$$\mathbf{A}_2 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -2I_{j-1} + I_j & 2I_{j-1} + I_j & 0 \\ -I_{j-1} - 2I_j & I_{j-1} - I_{j+1} & 2I_j + I_{j+1} \\ 0 & -I_j - 2I_{j+1} & I_j + 2I_{j+1} \end{bmatrix} \quad (7.2.215)$$

$$\mathbf{B}_1 = \frac{1}{2\Delta x} \begin{bmatrix} \Pi_{j-1} + \Pi_j & -\Pi_{j-1} - \Pi_j & 0 \\ -\Pi_{j-1} - \Pi_j & \Pi_{j-1} + 2\Pi_j + \Pi_{j+1} & -3\Pi_j - \Pi_{j+1} \\ 0 & -\Pi_j - \Pi_{j+1} & \Pi_j + \Pi_{j+1} \end{bmatrix} + \quad (7.2.216)$$

$$\frac{g}{6} \begin{bmatrix} -2\Pi_{j-1} - \Pi_j & -\Pi_{j-1} - 2\Pi_j & 0 \\ 2\Pi_{j-1} + \Pi_j & \Pi_{j-1} - \Pi_{j+1} & -\Pi_j - 2\Pi_{j+1} \\ 0 & 2\Pi_j + \Pi_{j+1} & \Pi_j + 2\Pi_{j+1} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_2 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -2\Pi_{j-1} - \Pi_j & 2\Pi_{j-1} + \Pi_j & 0 \\ -\Pi_{j-1} - 2\Pi_j & \Pi_{j-1} - \Pi_{j+1} & 2\Pi_j + \Pi_{j+1} \\ 0 & -\Pi_j - 2\Pi_{j+1} & \Pi_j + 2\Pi_{j+1} \end{bmatrix} + \quad (7.2.217)$$

$$\frac{g}{3} \begin{bmatrix} -2\Pi_{j-1} - \Pi_j & -\Pi_{j-1} - 2\Pi_j & 0 \\ 2\Pi_{j-1} + \Pi_j & \Pi_{j-1} - \Pi_{j+1} & -\Pi_j - 2\Pi_{j+1} \\ 0 & 2\Pi_j + \Pi_{j+1} & \Pi_j + 2\Pi_{j+1} \end{bmatrix}$$

Para la discretización temporal, se propone utilizar un esquema implícito de tres niveles en el tiempo, para la formulación GWCE (7.2.199), y una aproximación tipo Crank-Nicholson en la ecuación de cantidad de movimiento (7.2.200), con lo cual se genera el siguiente sistema de ecuaciones en diferencias:

$$\mathbf{M} \frac{\underline{A}^{n+1} - 2\underline{A}^n + \underline{A}^{n-1}}{\Delta t^2} + \mathbf{GM} \frac{\underline{A}^{n+1} - \underline{A}^{n-1}}{2\Delta t} + \alpha_1 [\mathbf{A}_1 \underline{Q}^{n+1} + \mathbf{B}_1 \underline{A}^{n+1} + \underline{P}^{n+1}] + \alpha_2 [\mathbf{A}_1 \underline{Q}^n + \mathbf{B}_1 \underline{A}^n + \underline{P}^n] + \alpha_3 [\mathbf{A}_1 \underline{Q}^{n-1} + \mathbf{B}_1 \underline{A}^{n-1} + \underline{P}^{n-1}] = 0 \quad (7.2.218)$$

$$\mathbf{M} \frac{\underline{Q}^{n+1} - \underline{Q}^n}{\Delta t} + \frac{1}{2} [\mathbf{A}_2 \underline{Q}^{n+1} + \mathbf{B}_2 \underline{A}^{n+1}] + \frac{1}{2} [\mathbf{A}_2 \underline{Q}^n + \mathbf{B}_2 \underline{A}^n] = 0 \quad (7.2.219)$$

donde Δt es el intervalo de tiempo de discretización; $n+1$, n y $n-1$ son los niveles de tiempo futuro, presente y pasado respectivamente; α_1, α_2 y α_3 los factores de peso temporal, los cuales se propone utilizar de manera que $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$ y $\alpha_1 = \alpha_3$ (Kinnmark, 1991; Luettich, *et al.*, 1992).

Reordenando las ecuaciones (7.2.218) y (7.2.219) de manera que agrupen los términos para el intervalo de tiempo $n+1$, el sistema de ecuaciones queda como:

$$\mathbf{a}_1 \underline{A}^{n+1} + \mathbf{b}_1 \underline{Q}^{n+1} = \underline{E}_1 \quad (7.2.220)$$

$$\mathbf{a}_2 \underline{A}^{n+1} + \mathbf{b}_2 \underline{Q}^{n+1} = \underline{E}_2 \quad (7.2.221)$$

donde las matrices \mathbf{a}_1 , \mathbf{a}_2 , \mathbf{b}_1 , \mathbf{b}_2 y los vectores \underline{E}_1 y \underline{E}_2 son:



En la solución del sistema anterior, se tiene que la matriz de coeficiente tiene una dependencia con respecto a las variables por solucionar en el intervalo $n+1$, la metodología que debe seguirse es proponer un valor de los términos por calcular iteración m e invertir la matriz; posteriormente, verificar el resultado de los términos en el instante $n+1$ de la iteración $m+1$ y, si son diferentes proponer este resultado en la matriz de coeficientes, y así continuar hasta tener una convergencia. Entonces, el sistema matricial (7.2.228) se puede escribir como:

$$\mathbf{A}^m \cdot \underline{X}^{n+1,m+1} = \underline{E} \quad (7.2.229)$$

donde m es la iteración de actualización de los términos no lineales.

Por otra parte, el criterio de convergencia en las iteraciones no lineales se define como:

$$\left| \left\| \underline{A}^{n+1,m+1} \right\|_{\infty} - \left\| \underline{A}^{n+1,m} \right\|_{\infty} \right| \leq \varepsilon \quad (7.2.230)$$

$$\left| \left\| \underline{Q}^{n+1,m+1} \right\|_{\infty} - \left\| \underline{Q}^{n+1,m} \right\|_{\infty} \right| \leq \varepsilon \quad (7.2.231)$$

Programación de flujo supercrítico:

Debido a que la condición de frontera esencial (ecuación 2.3.50) se tiene solamente en la frontera aguas arriba, el sistema (7.2.220) y (7.2.221) se desarrolla de la forma siguiente:

$$A_{j+1}^{n+1} = \frac{b_{2,j,j} H_{1j} - b_{1,j,j} H_{2j}}{a_{1,j,j} b_{2,j,j} - a_{2,j,j} b_{1,j,j}} \quad (7.2.232)$$

$$Q_{j+1}^{n+1} = \frac{b_{1,j,j} H_{2j} - b_{2,j,j} H_{1j}}{a_{1,j,j} b_{2,j,j} - a_{2,j,j} b_{1,j,j}} \quad (7.2.233)$$

Este sistema es válido para $j = \{2, 3, \dots, J\}$, y los coeficientes H_{1j} y H_{2j} se evalúan por medio de las siguientes ecuaciones:

$$H_{1j} = E_{1j} - a_{1,j,j-2} A_{j-1}^{n+1} - b_{1,j,j-2} Q_{j-1}^{n+1} - a_{1,j,j-1} A_j^{n+1} - b_{1,j,j-1} Q_j^{n+1} \quad (7.2.234)$$

$$H_{2j} = E_{2j} - a_{2,j,j-2} A_{j-1}^{n+1} - b_{2,j,j-2} Q_{j-1}^{n+1} - a_{2,j,j-1} A_j^{n+1} - b_{2,j,j-1} Q_j^{n+1} \quad (7.2.235)$$

Para el primer nodo, el cual queda en contacto con la condición de frontera de aguas arriba del canal y se puede identificar por la posición de discretización $j=1$, el sistema de ecuaciones (7.2.232) y (7.2.233) se considera como:



$$A_2^{n+1} = \frac{b_{2,2} H_{11} - b_{1,2} H_{21}}{a_{1,2} b_{2,2} - a_{2,2} b_{1,2}} \quad (7.2.236)$$

$$Q_2^{n+1} = \frac{b_{1,2} H_{21} - b_{2,2} H_{11}}{a_{1,2} b_{2,2} - a_{2,2} b_{1,2}} \quad (7.2.237)$$

A su vez, los coeficientes H_{11} y H_{21} son:

$$H_{11} = E_{11} - a_{1,1} f(t) - b_{1,1} g(t) \quad (7.2.238)$$

$$H_{21} = E_{21} - a_{2,1} f(t) - b_{2,1} g(t) \quad (7.2.239)$$

En forma similar a la solución para flujo subcrítico, la condición de simulación para flujo supercrítico también contiene términos no lineales. Entonces, al solucionar el intervalo $n + 1$ es necesario buscar asimismo una solución con base en las iteraciones no lineales. La estrategia de solución para los términos no lineales puede ser similar a la propuesta para flujo subcrítico, y la definición del criterio de convergencia puede hacer uso de las ecuaciones (7.2.230) y (7.2.231). Para comprobar el funcionamiento de este esquema en el siguiente subcapítulo, se desarrollará una serie de pruebas numéricas.

7.2.9.2. Verificación numérica

Las pruebas numéricas del esquema discretizado se basan en una formulación de elemento finito para la condición espacial y de diferencias finitas para la condición temporal, aplicadas a las ecuaciones de la formulación GWCE y cantidad de movimiento. Estas pruebas se centraron en la evaluación de la influencia del término de filtrado G , por lo que se impusieron dos condiciones de flujo: una subcrítica y otra supercrítica, cuidando que fueran las mismas condiciones de flujo que se utilizaron para la construcción de los retratos de amplitud y fase, generados en el subcapítulo (7.2.8).

a) Pruebas para flujo subcrítico (Fs{#}Gw)

La condición inicial de simulación para flujo subcrítico se define en la tabla 5.1. La condición de frontera es un hidrograma triangular, como se puede observar en la lámina 5.68. Finalmente, los resultados de la simulación se pueden observar en las tablas (7.5)-(7.7).



Propiedades de Propagación de Esquemas Numéricos para la Simulación de Flujos a Superficie Libre

Prueba Fs01Gw con G=1.0		
Número de Courant	Condición de estabilidad	
	Numérica	Teórica
0.001	Sí	Sí
0.01	Sí	Sí
0.1	Sí	Sí
1	Sí	Sí
2	Sí	Sí
5	Sí	Sí
10	Sí	Sí
30	Sí	Sí
50	Sí	Sí
75	No	Sí
150	No	Sí

Tabla 7.5. Resultado de estabilidad y convergencia de la prueba Fs01Gw.

Prueba Fs02Gw con G=10		
Número de Courant	Condición de estabilidad	
	Numérica	Teórica
0.001	Sí	Sí
0.01	Sí	Sí
0.1	Sí	Sí
1	Sí	Sí
2	Sí	Sí
5	Sí	Sí
10	Sí	Sí
30	Sí	Sí
50	Sí	Sí
75	No	Sí
150	No	Sí

Tabla 7.6. Resultado de estabilidad y convergencia de la prueba Fs02Gw.

Prueba Fs01Gw con G=100		
Número de Courant	Condición de estabilidad	
	Numérica	Teórica
0.001	Sí	Sí
0.01	Sí	Sí
0.1	Sí	Sí
1	Sí	Sí
2	Sí	Sí
5	Sí	Sí
10	Sí	Sí
30	Sí	Sí
50	Sí	Sí
75	No	Sí
150	No	Sí

Tabla 7.7. Resultado de estabilidad y convergencia de la prueba Fs03Gw.

También de los resultados de la simulación se observó que el error que se tiene en la simulación del flujo en cada prueba se modifica a medida que el número de Courant aumenta. Para evaluar el crecimiento del error, se consideró que una solución muy cercana a la exacta es la que se tiene para un valor del número de Courant $C_r = 0.001$, y esta solución se comparó con valores mayores de Courant. Así, los resultados gráficos del error de estimación de gasto y de nivel para las pruebas Fs01Gw-Fs03Gw se pueden observar en las láminas 7.15-7.16. En los resultados numéricos se observa que para valores de Courant de 75 y 150 se tienen problemas de estabilidad numérica, mientras que la predicción teórica indica lo contrario. La divergencia resultados entre lo teórico y numérico se debe a la no linealidad del sistema de discretización y la técnica utilizada de convergencia sobre las iteraciones no lineales, la cual no es lo suficientemente robusta para contar con resultados convergentes para números de Courant mayores de 50.

b.) Pruebas para flujo supercrítico ($Ft_{\{#\}}Gw$)

La condición inicial de simulación para flujo supercrítico se define en la tabla 5.3, y la condición de frontera es un hidrograma triangular (lámina 5.68).

La prueba de simulación se hizo nuevamente considerando los valores del término de filtrado G de 1, 10 y 100, para diferentes valores del número de



Courant, y el resultado fue que este esquema es incondicionalmente inestable para flujo supercrítico. Esto se debe a que en realidad se está solucionando una ecuación de onda, y debido a que el flujo supercrítico sólo tiene condición de frontera aguas arriba. Entonces, la propagación de onda es libre hacia aguas abajo y esto produce que este esquema sea incondicionalmente inestable.



CAPÍTULO 8

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Para precisar en forma explícita los límites de aplicación de un modelo de simulación numérica, se propuso en este trabajo una metodología basada en la propagación de perturbaciones. Por medio de esta técnica, se puede evaluar con detalle la condición de convergencia de los esquemas numéricos derivados de ecuaciones no lineales.

Con la introducción de esta metodología se buscó contribuir en el conocimiento respectivo y complementar los estudios que se han llevado a cabo para la determinación de los límites de estabilidad, propagación de amplitudes y fase, así como convergencia de iteraciones no lineales, ya que en la mayoría de los casos son incompletos o están simplificados en demasía (Abbott 1979; Kinnmark, 1986; Lyn *et al.* 1987 y Meselhe, 1997). El resultado que se ha obtenido en muchas ocasiones ha provocado que algunos análisis no indiquen lo que sucede realmente durante el proceso de discretización, por lo que una contribución puede ser el mejoramiento de los criterios de discretización y el cuidado que se debe tener en los términos no lineales.

Conocer con antelación las propiedades de propagación de un esquema numérico para la solución de ecuaciones diferenciales parciales, da formalidad en la manera de discretizar y asegura un mejor resultado. De ese modo, al contar con un criterio basado en un análisis de propagación de perturbaciones,



previo a la programación y uso de un simulador, permite tener una mayor certidumbre de los límites de su aplicación. Asimismo, se podrá diferenciar si los resultados de la simulación numérica son producto del fenómeno físico o sólo un artificio numérico. Este tipo de problemas se presenta en el momento de calibrar el modelo de simulación numérica con respecto a un problema real (Aguilar, *et al.*, 1994; Garcia, 1994; Azpirotz, 1995).

De los resultados de este trabajo se tienen avances en concordancia con el objetivo marcado al inicio del mismo, los cuales se enuncian en seguida:

Determinación del límite de convergencia del sistema continuo de la ecuaciones diferenciales parciales no conservativas unidimensionales de Saint-Venant, en el cual se encontró que la condición de estabilidad se presenta cuando el número de Vedernikov es menor a la unidad, $|V_e| \leq 1$. Para la versión no conservativa de Saint-Venant, se hizo el análisis de convergencia del modelo que resulta al aplicar el esquema de Leendertse. Los resultados indican que este esquema tiene problemas para flujo supercrítico $F_r > 1$, como se puede observar en los retratos de fase y amplitud, $F_t \{ \# \} Le$. Además se comprobó con base en las pruebas numéricas, aunque se notó en ellas que al tener valores del número de Froude cercano a $1 < F_r$, el esquema de Leendertse presenta problemas de estabilidad para un número de Courant $C_r > 5$.

Además de revisarse la versión no conservativa, se estudió la versión conservativa de las ecuaciones de Saint-Venant en su forma integral y diferencial. Al desarrollar el sistema continuo se determinó que el rango de estabilidad del sistema continuo unidimensional está definido por $|V_e| \leq 1$. Este resultado se confirma también físicamente (Chow, 1979; Ponce y Maisner, 1978), en donde se tiene reportado que para valores superiores a la unidad del número de Vedernikov, se presenta en surgimiento de pequeñas ondas de inestabilidad en la superficie. Esto se ha conocido como ondas rodantes (*roll waves*, en inglés). Las ondas rodantes en la superficie son un aspecto que no puede ser simulado con base en un modelo integrado en la vertical, ya que la superficie libre del agua es una condición de frontera y el problema se manifiesta principalmente en ella. Este resultado pone de manifiesto la congruencia de este tipo de análisis con lo que sucede en la física real.

Con el sistema de ecuaciones conservativas de Saint-Venant, se analizó una discretización basada en un esquema conocido como de caja (*Box scheme*, en inglés) o de Preissmann (Abbott, 1979; Cunge *et al.*, 1980). El resultado del análisis de convergencia tiene diferentes condiciones: primero, se tiene que el esquema es incondicionalmente estable para $|V_e| \leq 1$, pero además se debe cumplir que $\psi = 1/2$ y $\theta \geq 1/2$, donde ψ y θ son los factores de peso espacial y temporal respectivamente. Por otra parte, se determinó que para las



condiciones de flujo en que $C_r \geq 30$, si se aplica la metodología iterativa de Picard para la actualización de los terminos no lineales, se tienen problemas de convergencia numérica en el caso de los flujos subcrítico y supercrítico. Por tanto, se analizó la posibilidad de dar un tratamiento especial para la solución numérica de los términos no lineales, utilizando el método de Newton-Raphson. Como resultado del análisis de propagación de perturbaciones y de las pruebas numéricas, se demostró que se mejora la convergencia de los términos no lineales para valores de $C_r \geq 30$, cuando se simula un flujo, sea subcrítico o supercrítico.

Para el caso de la simulación del flujo de aguas someras en la determinación de las fluctuaciones de marea y patrones de corrientes marinas, se ha planteado el uso de la Ecuación de Continuidad Generalizada de Onda (GWCE), (Westerink *et al.*, 1987; Luetlich *et al.*, 1991), la cual fue propuesta por Lynch y Gray, (1979) para eliminar algunos problemas que se presentan de oscilaciones espurias, al momento de tener resultados de la discretización en elemento finito. Según se enuncia en la literatura, la aplicación de la GWCE es satisfactoria, aunque en ciertas condiciones de simulación se tienen problemas de conservación de masa de la GWCE. Con el fin de evaluar este problema, se realizó un análisis de propagación de perturbaciones de la versión continua conservativa de la formulación GWCE, por medio de la metodología que se ha descrito capítulo 3, y se demostró que a pesar de tener un problema bien planteado y bajo la premisa de que es estable, se obtuvieron respuestas adecuadas para el límite de estabilidad del flujo al momento de originarse las ondas rodantes, con la salvedad de que el término de filtrado que se usa para eliminar las oscilaciones espurias induce a que la formulación de la GWCE presente un problema de conservación de masa de un nodo de discretización a otro nodo, para valores grandes del número de onda y valores relativamente pequeños del término de filtrado (Aldama *et al.*, 1999).

Además, para complementar el estudio de la formulación GWCE en su versión discreta, se planteó un esquema en elemento finito para la dimensión espacial, por el método de residuos pesados de Galerkin (Reddy, 1991) y diferencias finitas para la dimensión temporal, para después realizar un análisis de convergencia numérica por la metodología de propagación de perturbaciones que se ha mencionado con anterioridad. El resultado obtenido con base en los retratos de fase y amplitud indica que este esquema es estable para flujo subcrítico, para valores de $C_r < 50$, pero que es incondicionalmente inestable para flujo supercrítico. Durante la realización de las pruebas numéricas se confirmaron estas condiciones de estabilidad.

Debido a que no se tienen soluciones directas de las ecuaciones que gobiernan el movimiento del flujo, es usual solucionar éstas por medio técnicas de discretización, en las que se debe cuidar que el sistema sea convergente.



Entonces, la metodología de análisis de las propiedades de propagación amplía el criterio de convergencia numérica, para el caso de un sistema de ecuaciones diferenciales parciales no lineales. Esto es debido a que se logra así extraer información adicional de las variables dependientes, sobre los términos que contienen una dependencia paramétrica o son no lineales, haciéndose uso de una expansión en serie de Fréchet-Taylor.

Además, al realizar un análisis de escalas múltiples y de localización, es posible evaluar la influencia de cada uno de los términos de la ecuación y catalogar su importancia, dependiendo del tipo de problema de flujo que se esté analizando.

De tal modo, el estudio de las propiedades de propagación permite, por una parte, que el análisis de estabilidad sea más completo cuando se aplica el método de Fourier y, además, que sea posible incluir algunas características dominantes producidos por los términos no lineales, entonces el criterio de convergencia numérica es así más robusto.

Finalmente, la metodología de análisis de propiedades de propagación de perturbaciones, aplicada a ecuaciones diferenciales parciales no lineales, más avanzada que existe en este momento es la desarrollada en este documento y tiene la siguiente secuencia:

a) *Análisis de propagación de perturbaciones sobre las variables dependientes continuas.* Para los términos no lineales o con dependencia paramétrica se aplica una expansión de Fréchet-Taylor. Además, se realiza un análisis de escalas múltiples y localizado. De esta manera, se determina la influencia de cada término en las ecuaciones perturbadas y, consecuentemente, se obtiene un sistema lineal localizado.

b) *Método de Fourier continuo.* Se aplica el método de Fourier para evaluar las propiedades de propagación de las ecuaciones de movimiento localizadas. Se determina la relación de dispersión continua y el límite de estabilidad del sistema continuo.

c) *Discretización numérica.* Se propone una estrategia de discretización del sistema de ecuaciones diferenciales parciales (esquemas en diferencias finitas o de elemento finito), y se verifica que el sistema discreto resultante cumpla con las condiciones para tener un problema bien planteado.

d) *Análisis de consistencia.* Se realiza un análisis de consistencia, sustituyendo la solución exacta de las ecuaciones diferenciales en las ecuaciones discretizadas. Se aplican expansiones en serie de Taylor a las variables dependientes, alrededor de un punto particular de la malla. El resultado debe



ser la ecuación diferencial original adicionada de un remanente. Este remanente debe reducirse a cero cuando la malla es refinada *ad infinitum*, lo cual implica que el esquema discreto es consistente. También se determina el orden del error de truncado del esquema numérico.

e) *Análisis de propagación de perturbaciones sobre las variables dependientes discretas.* Para los términos no lineales o con dependencia paramétrica se aplica una expansión de Fréchet-Taylor. Además de esto, se emplea un análisis de escalas múltiples y de localización, para determinar la influencia de cada término en la ecuación perturbada, con lo cual se obtiene el sistema discreto lineal localizado.

f) *Método de Fourier discreto.* Se aplica el método de Fourier para evaluar el comportamiento de la estabilidad del sistema discreto linealizado, y se hace uso del teorema de Von Neumann para determinar las condiciones de estabilidad del sistema discreto. La relación de dispersión discreta permite determinar los retratos de amplitud y fase, que caracterizan el esquema en función del número de onda y de las condiciones del flujo.

Además, esta metodología permite realizar un análisis de convergencia de iteraciones para la solución de los sistemas de ecuaciones discretas no lineales, ya sea por el método de Picard (Aldama y Paniconi, 1991) o el método de Newton-Raphson (Burden y Faires, 1980; Paniconi *et al.*, 1991), por medio de dar un tratamiento al esquema discretizado como se indica en los incisos (e) y (f), con la diferencia de que en este caso se estudia la propagación de errores de una iteración a otra. Para determinar la condición de convergencia, se considera que el factor de amplificación del error debe ser estrictamente menor que uno en valor absoluto (Tingsanchali *et al.*, 1989; Aldama y Paniconi, 1991; Paniconi *et al.*, 1991).



BIBLIOGRAFÍA

- Abbott, M. B. 1979. *Computational hydraulics: elements of the theory of free surface flows*. Londres: Pitman Publishing Limited, 326 pp. + xviii.
- Abbott, M. B. y D. R. Basco. 1989. *Computational Fluid Dynamics an Introduction for Engineers*. Reino Unido: Longman Scientific & Technical, 425 pp. + xiv.
- Aguilar, Ch. A., G. E. Pedroza, E. Daval, E. A. Azpirotz y P. Kosuth. 1995. *Automatización del Canal Alto del Yaqui*. Instituto Mexicano de Tecnología del Agua. Proyecto HC-9508, Progreso, Morelos, México, 28 pp.
- Aguilar, Ch. A., G. E. Pedroza y E. Daval. 1994. Simulación del Funcionamiento del Canal Alto del Yaqui. *Memorias del XIII Congreso Nacional de Hidráulica*. Puebla, México.
- Aguilar, Ch. A. y M. E. Escalante. 1998. *Reporte de la Simulación Hidrodinámica de la Laguna de Nichupté*. Instituto Mexicano de Tecnología del Agua. Reporte Interno. Jiutepec, Morelos, México, 12 pp.
- Aldama, A. A., S. Daly, D. Wiate y J. J. Westerink. 1981. *Numerical Modeling of Unsteady One-Dimensional Open Channel Flow Using Finite Differences Schemes*. Project Report for 1.161 Numerical Modeling of Physical Systems MIT, 34 pp.
- Aldama, A. A. y C. Paniconi. 1991. An Analysis of the Convergence of Picard Iterations for Implicit Approximations of Richard's Equation. *Num. Meth. Water Resourc*, pp. 521-528.
- Aldama, A. A. y Ch. A. Aguilar. 1996. Stability Analysis of a General Preissmann Scheme. *Comp. Methods in Water Res. XI, Computational Mechanics Publications, UK*, pp. 37-44.
- Aldama, A. A. y A. Ocón. 1998. Algunas reflexiones sobre la resistencia al flujo en canales y sobre la fórmula de Manning. *Memorias del XV Congreso Nacional de Hidráulica*. Oaxaca, México.
- Aldama, A. A. y Ch. A. Aguilar. 1999. *Evaluación de la Conservación de Masa en la Formulación Generalizada de Onda de las Ecuaciones de Aguas Someras*. Instituto Mexicano de Tecnología del Agua. Anuario 1999, Progreso, Morelos, México, pp. 13-17.
- Ames, W. F. 1992. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*. Third Edition. San Diego, CA: Academic Press Inc, 451 pp. + xv.
- Aparicio, M. F. 1985. *Simulación Numérica de Flujo Supercrítico Transitorio*. Tesis de Doctorado, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México. México, 120 pp.



- Arroyo, C. V. 1994. *Modelo Unidimensional de Simulación Numérica para Drenaje Agrícola*. Tesis de Maestría, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México. Jiutepec, Morelos, México, 155 pp.
- Azpirotz, A. E. 1995. *Automatisation du canal Alto del Yaqui*. Trabajo de fin de carrera. Ecole National Supérieure D'Electrotechnique D'Electronique D'Informatique Et D'Hydraulique de Toulouse. Francia.
- Baume, J. P. y P. O. Malaterre. 1992. *Simulation of Irrigation Channels, Part II: Theoretical Concepts*. Montpellier, Francia: Centre National du Machinisme Agricole, du Génie Rural, des Eaux et des Forêts, 68 pp. + iv.
- Burden, R. L. y J. D. Faires. 1985. *Análisis Numérico*. México, D.F.: Grupo Editorial Iberoamericana, S.A. de C.V., 721 pp.
- Celia, W. A. y W. G. Gray. 1992. *Numerical Methods for Differential Equations, Fundamental Concepts for Scientific and Engineering Applications*. New Jersey: Prentice-Hall, Inc., 436 pp. + xii.
- Champeney, D. C. 1987. *A handbook of Fourier theorems*, Cambridge, U.K.: Cambridge University Press, 185 pp. + ix.
- Chapra, S. C. y R. P. Canale. 1989. *Métodos Numéricos para Ingenieros*. México, D.F.: Mc. Graw-Hill/Interamericana de México, S.A. de C.V., 641 pp. + xiv.
- Chippada, S., C. N. Dawson, M. L. Martinez y M. F. Wheeler. 1997. *A Projection Method for Constructing A Mass Conservative Velocity Field*. Internal Report, Texas Institute for Computational and Applied Mathematics. University of Texas, 13 pp.
- Chow, V. T. 1959. *Open-Channel Hydraulics*. Nueva York: Mc.Graw-Hill, 680pp. + xviii.
- Cunge, J. A. y M. Wegner. 1964. Intégration Numérique des Équations D'écoulement de Barre de Saint-Venant por un Schéma Implicite de Différences Finies. *La Huille Blanche*, 1, pp. 33-39.
- Cunge, J. A., F. M. Holly y A. Verwey. 1980. *Practical Aspects of Computational River Hydraulics*. Londres: Pitman Publishing Limited, 420 pp.
- DIGITAL, Inc. 1997. *DIGITAL™ Visual Fortran*. Professional Edition, v.5.0a
- Drolet, J. y W. G. Gray. 1988. On the Well Posedness of Some Wave Formulations of Shallow water Equations. *Adv. Water Resources*, 11, pp. 84-93.
- Fennema, R. J. y M. H. Chaudry. 1989. Implicit Methods for Two-Dimensional Unsteady Free-Flows. *ASCE J. Hydr. Res.*, 27(3), pp. 321-332.
- Fischer, H.B. 1981. *Transport Models for Inland and Coastal Waters*. Nueva York: Academic Press, pp.542 + xv.
- Fletcher, C. A. 1988. *Computational Techniques for Fluid Dynamics, vol. 1, Fundamental and General Techniques*. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, Springer Series in Computational Physics, 409 pp. + xiv.
- French, R. H. 1985. *Open Channel Hydraulics*. Nueva York: Mc.Graw-Hill Inc., 724 pp. + xi.
- García, V. N. H. 1994. *Simulación Numérica de Flujo Intermitente para el Diseño de Riego Parcelario por Gravedad*. Tesis de Doctorado, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México. México, 316 pp.



- Gerald, C. F. 1987. *Análisis Numérico*. México, D.F.: Representaciones y Servicios de Ingeniería, S.A., segunda edición, 631 pp. + xiii.
- ISML. 1994. *ISML Math/Library, User's Manual, v.3.0*. Visual Numerics. Houston, Texas.
- Jin, Y. y P. M. Steffler. 1993. Predicting Flow Incurved Open Channels by Depth-averaged Method. *ASCE J. Hydr. Eng.*, 119(1), pp. 109-124.
- Kevorkian, J. y J. D. Cole. 1996. *Multiple Scale and Singular Perturbation Methods*. Applied mathematical sciences Vol. 114. Nueva York: Springer-Verlag, 632 pp. + viii.
- Kinnmark, I. y W. G. Gray. 1985. *The $2\Delta x$ -test: A Tool for Analyzing Spurious Oscillations*. *Adv. Water Resources*, 8, pp. 129-135.
- Kinnmark, I. 1986. *The Shallow Water Wave Equations: Formulation, Analysis and Application*. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, Lecture Notes in Engineering 15, 187 pp. + xxv.
- Lapidus, L. y Pinder, G. 1982. *Numerical Solution of Partial Differential Equations in Science and Engineering*. New Jersey: John Wiley & Sons, 212 pp. + xiv.
- Luenberger, D. G. 1969. *Optimization by Vector Space Methods*. Nueva York: John Wiley & Sons, Inc., 326 pp. + xvii.
- Luettich, R. A., J. J. Westerink y N. W. Scheffner .1992. *ADCIRC: An Advanced Three-dimensional Circulation Model for Shelves, Coasts and Estuaries*, U.S. Whashington D.C.: Army Corps of Engineers, Technical report DRP-92-6, 137 pp.
- Lyn, D. A. y P. Goodwin. 1987. Stability of a general Preissmann scheme. *ASCE J. Hydr. Eng.*, 113(1), pp. 16-28.
- Lynch D. R. y W. G. Gray. 1979. A Wave Equation Model for Finite Element Tidal Computations. *Computers and Fluids*, 7, pp. 207-228.
- MathWorks, Inc. 1997. *MatLab, The Language of Technical Computing, v.5.1.0.421*. Natick, MA.
- Maza, A. J. 1984. *Hidrodinámica, Bases para la Hidráulica Fluvial*. México: Universidad Nacional Autónoma de México, Series del Instituto de Ingeniería, Núm. D-20, 549 pp. + vii.
- Meselhe, E. A. y F. M. Holly. 1997. Invalidity of Preissmann Scheme for Transcritical Flow. *ASCE J. Hydr. Eng.*, 123(7), pp. 652-655.
- Milne, R. D. 1980. *Applied Functional Analysis, An Introduction Treatment*. Londres: Pitman Publishing Limited, 501 pp. + xv.
- Morton, K. W. y D. F. Mayers. 1994. *Numerical Solution of Partial Differential Equations*. Cambridge: Cambridge University Press, 227 pp.
- Nayfeh, A. H. 1980. *Introduction to Perturbation Techniques*. Nueva York: John Wiley & Sons, 519 pp. + xiii.
- Paniconi, C., A. A. Aldama y E. F. Wood. 1991. Numerical Evaluation of Iterative and Nolinear Methods for the Solution of the Nolinear Richards Equation. *Water Resour. Res.*, 27(6), pp. 1147-1163.
- Panton, R. L. 1984. *Incompresible Flow*. Nueva York: John Wiley & Sons, 780 pp. + xv.



- Ponce, M. V. y D. B. Simons. 1977. Shallow wave propagation in open channel flow. *ASCE J. Hydr. Div.*, HY12, pp. 1461-1476.
- Ponce, M. V. y P. M. Maisner. 1993. Verification of theory of roll wave formation. *ASCE J. Hydr. Eng.*, 119(6), pp. 768-773.
- Preissmann, A y G. Werner. 1961. Application du Calcul des Intumescences sur Machine Électronique à Divers cas Pratique. *La Huille Blanche*, 5, pp. 613-621.
- Press, W. H., S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling y B. P. Flannery. 1992. *Numerical Recipes in Fortran, The Art of Scientific Computing*. Nueva York: Cambridge University Press, Segunda edición, 963 pp. + xxvi.
- Ramirez, L. H., P. V. Echeverría y A. Ch. Aguilar. 1997. *Análisis Hidrodinámico del Difusor Submarino de la Planta de Tratamiento de Coyuca de Benitez, Gro.* Instituto Mexicano de Tecnología del Agua. Proyecto HC-9727. Jiutepec, Morelos, México, 99 pp. + v.
- Reddy, J. N. 1993. *An Introduction to the Finite Element Method*. Nueva York: Mc.Graw-Hill Inc., 684 pp. + xix.
- Samuels, P. G. y C. P. Skeels. 1990. Stability limits for Preissmann's scheme. *ASCE J. Hydr. Eng.*, 116(8), pp. 997-1012.
- Shanahan, P. y D. R. Harleman. 1984. *Linked Hydrodynamic Biogeochemical Models of Water Quality in Shallow Lakes*. Massachusetts: MIT, Department of Civil Engineering, report No. 268, 279 pp. + xiv.
- Shiao-Kung, L. y J. J. Leendertse. 1978. Multidimensional Numerical Modeling of Estuaries and Coastal Seas. *Adv. in Hydrosciences*, 11, pp. 95-164.
- Smith, G. D. 1985. *Numerical Solution of Partial Differential Equations, Finite Difference Methods*. Third Edition. Nueva York: Oxford University Press, 337 pp. + xiii.
- Strikwerda, J. C. 1989. *Finite Difference Schemes and Partial Differential Equations*. Wadsworth & Brooks/Cole Advance Books & Software, 386 pp. +xii.
- Tingsanchali, T. S., S. Vongvisessomaji y G. Hwang. 1989. Stability Analysis of Two-Dimensional Depth-Averaged Model. *ASCE J. Hydr. Eng.*, 115(9), pp. 1204-1222.
- Tsanis, I.K. 1989. Simulation of Wind-induced Water Currents. *ASCE J. Hydr. Eng.*, 115(8), pp. 1113-1134.
- Westerink, J. J., J. J. Connor y K. D. Stolzenbach. 1987. A Primitive Pseudo Wave Equation Formulation for Solving the Harmonic Shallow Water Equations. *Adv. Water Resources*, 10, pp. 188-199.
- Yen, B.C. 1974. Open-Channel Flow Equations Revisited. *ASCE J. Eng. Mech. Div.*, 99(EM5), pp. 979-1009.
- Zienkiewicz, O. C. y R. L. Taylor. 1989. *The Finite Element Method, Vol. 1 Basic Formulation and Linear Problems*. Nueva York: Mc.Graw-Hill Inc, Fourth Edition, 648 pp. + xx.



ANEXOS

ANEXO A. Determinación de los valores extremos de la función κ para la condición de Nyquist y para $k\Delta x \rightarrow 0$.



ANEXO A. Determinación de los valores extremos de la función κ para la condición de Nyquist y $k\Delta x \rightarrow 0$.

Este análisis permite conocer el comportamiento de la función κ para los casos extremos y, de esta manera, determinar su influencia en la condición de estabilidad del esquema de Preissmann. Para realizar este análisis, se toma la relación (5.4.16), que es la respuesta de κ para cualquier número de onda:

$$\kappa = U_o - \frac{i[c + (2\psi - 1)si]I}{2\lambda sU_o} \pm \sqrt{\left[\frac{U_o}{F_r}\right]^2 + \frac{i[c + (2\psi - 1)si]IV_e}{\lambda sF_r} - \left[\frac{c + (2\psi - 1)si}{2\lambda sU_o}\right]^2} \quad (A.1)$$

y aplicando las siguientes variables simplificatorias $X = \frac{(2\psi - 1)I}{2\lambda U_o}$ y $\Gamma = \frac{cI}{2\lambda sU_o}$ y desarrollando la expresión anterior, tenemos:

$$\kappa = U_o + X - i\Gamma \pm \sqrt{gD_o + 2i\sqrt{gD_o}V_e\Gamma - 2\sqrt{gD_o}V_eX - (\Gamma + iX)^2} \quad (A.2)$$

y como κ es una variable compleja se puede extraer su parte real e imaginaria de forma que

$$\text{Re}(\kappa) = U_o + X \pm \left\{ \frac{1}{2} \left[\sqrt{(gD_o - 2\sqrt{gD_o}V_eX - \Gamma^2 + X^2)^2 + 4\Gamma^2(\sqrt{gD_o}V_e - X)^2} + gD_o - 2\sqrt{gD_o}V_eX - \Gamma^2 + X^2 \right] \right\} \quad (A.3)$$

$$\text{Im}(\kappa) = \Gamma \pm \text{sgn}(\sqrt{gD_o}V_e - X) \left\{ \frac{1}{2} \left[\sqrt{(gD_o - 2\sqrt{gD_o}V_eX - \Gamma^2 + X^2)^2 + 4\Gamma^2(\sqrt{gD_o}V_e - X)^2} - gD_o + 2\sqrt{gD_o}V_eX - \Gamma^2 + X^2 \right] \right\} \quad (A.4)$$

Para conocer el comportamiento de la parte real e imaginaria (A.3) y (A.4), se tomarán dos casos:

CASO I. La frecuencia de Nyquist se tiene para una condición de $k\Delta x/2 = \pi/2$, lo cual implica que se tenga que $\cos(k\Delta x/2) = 0$ y $\text{sen}(k\Delta x/2) = 1$ y, analizando la relación (A.1), se tiene

$$\kappa = U_o + X \pm \sqrt{gD_o - 2\sqrt{gD_o}V_eX + X^2} \quad (A.5)$$

y la solución para la parte real es

$$\text{Re}(\kappa) = U_o - \frac{(2\psi - 1)I}{2\lambda U_o} \pm \sqrt{gD_o - \frac{\sqrt{gD_o}(2\psi - 1)IV_e}{\lambda F_r} + \left[\frac{(2\psi - 1)I}{2\lambda U_o}\right]^2} \quad (A.6)$$

y la parte imaginaria

$$\text{Im}(\kappa) = 0 \quad (A.7)$$



CASO II. Haciendo el análisis para la condición de $k\Delta x/2 \rightarrow 0$, se tiene que $\cos(k\Delta x/2) \rightarrow 1$ y $\sin(k\Delta x/2) \rightarrow 0$, analizando para la variable de simplificación Γ

$$\lim_{k\Delta x \rightarrow 0} \Gamma = \lim_{k\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos\left(\frac{k\Delta x}{2}\right) I}{2\lambda \sin\left(\frac{k\Delta x}{2}\right) U_o} = \frac{I}{2\lambda U_o} \lim_{k\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{2}{k\Delta x} - \frac{(k\Delta x)^2}{2!4} + \frac{(k\Delta x)^3}{2!8} \dots \right] \rightarrow \infty \quad (A.8)$$

Entonces, analizando el comportamiento de la parte real de κ

$$\text{Re}(\kappa) = A \pm \left[\frac{1}{2} \left\{ \sqrt{(B - \Gamma^2)^2 + \Gamma^2 C} + B - \Gamma^2 \right\} \right]^{1/2} \quad (A.9)$$

donde $A = U_o + X$, $B = gD_o - 2\sqrt{gD_o}V_e X + X^2$, $C = 4(\sqrt{gD_o}V_e - X)^2$

Desarrollando la expresión (A.9), y reagrupando:

$$\text{Re}(\kappa) = A \pm \left[\frac{1}{2} \left\{ \Gamma^2 \sqrt{1 + \frac{1}{\Gamma^2}(C - 2B) + \frac{B^2}{\Gamma^4}} + B - \Gamma^2 \right\} \right]^{1/2} \quad (A.10)$$

Si se considera que se tiene un término de orden muy pequeño para $\varepsilon = (C - 2B)/\Gamma^2 + B^2/\Gamma^4$ entonces la relación (A.10) que da como:

$$\text{Re}(\kappa) = A \pm \left[\frac{1}{2} \left\{ \Gamma^2 \sqrt{1 + \varepsilon} + B - \Gamma^2 \right\} \right]^{1/2} \quad (A.11)$$

realizando la expansión binomial del tipo $(1 + \varepsilon)^{1/2} = 1 + \varepsilon/2 - \varepsilon^2/8 + O(\varepsilon^3)$ debido a que se tiene la condición $\Gamma \rightarrow \infty, \varepsilon \rightarrow 0$ cuando $k\Delta x \rightarrow 0$ y $\varepsilon \ll 1$. Aplicando la expansión binomial antes mencionada en la ecuación (A.11), y despreciando los términos de orden superior se tiene

$$\text{Re}(\kappa) = A \pm \left[\frac{1}{2} \left\{ \Gamma^2 + \frac{(C - B)}{2} + O\left(\frac{1}{\Gamma^2}\right) - \Gamma^2 + B \right\} \right]^{1/2} = A \pm \left[\frac{C}{4} + O\left(\frac{1}{\Gamma^2}\right) \right]^{1/2} \quad (A.12)$$

Nuevamente, aplicando la expansión binomial a la ecuación (A.12)

$$\text{Re}(\kappa) = A \pm \frac{C^{1/2}}{2} \left[1 + \frac{4}{C} O\left(\frac{1}{\Gamma^2}\right) \right]^{1/2} = A \pm \frac{C^{1/2}}{2} + O\left(\frac{1}{\Gamma^2}\right) \quad (A.13)$$

y regresando a las variables originales de la parte $\text{Re}(\kappa)$

$$\text{Re}(\kappa) = U_o + \frac{(2\psi - 1)I}{2\lambda U_o} \pm \left[\sqrt{gD_o} - \frac{(2\psi - 1)I}{2\lambda U_o} \right] + O\left(\frac{1}{\Gamma^2}\right) \quad (A.14)$$

Analizando en la ecuación anterior los diferentes valores que puede tomar el lado izquierdo, dependiendo del signo, tomando el signo positivo, se tiene



$$\operatorname{Re}(\kappa)_+ = U_o + \sqrt{gD_o} + O\left(\frac{1}{\Gamma^2}\right) \quad (\text{A.15})$$

Anteponiendo el factor λ en la ecuación (A.15), se tiene

$$\lambda \operatorname{Re}(\kappa)_+ = C_{r(+)} = \lambda(U_o + \sqrt{gD_o}) + O\left(\frac{1}{\Gamma^2}\right) \quad (\text{A.16})$$

Realizando el mismo procedimiento para el signo negativo

$$\operatorname{Re}(\kappa)_- = U_o - \sqrt{gD_o} + \frac{(2\psi - 1)I}{\lambda U_o} + O\left(\frac{1}{\Gamma^2}\right) \quad (\text{A.17})$$

también

$$\lambda \operatorname{Re}(\kappa)_- = C_{r(-)} + \frac{(2\psi - 1)I}{U_o} + O\left(\frac{1}{\Gamma^2}\right) \quad (\text{A.18})$$

Por otra parte, analizando la parte imaginaria de κ

$$\operatorname{Im}(\kappa) = -\Gamma \pm \operatorname{sgn}(B - \Gamma^2) \left[\frac{1}{2} \left\{ \sqrt{(B - \Gamma^2)^2 + \Gamma^2 C} - B + \Gamma^2 \right\} \right]^{1/2} \quad (\text{A.19})$$

Aplicando el mismo desarrollo con la expansión binomial, se tiene que la parte imaginaria se puede expresar de la forma siguiente:

$$\operatorname{Im}(\kappa) = -\Gamma \pm \operatorname{sgn}(B - \Gamma^2) \left[\Gamma + O\left(\frac{1}{\Gamma}\right) \right] \quad (\text{A.20})$$

y los resultados para los diferentes signos de la parte imaginaria, cuando $\Gamma \rightarrow \infty$ para $k\Delta x \rightarrow 0$. Esto implica que el valor de lo que esta en el radical es negativo; por tanto:

$$\operatorname{Im}(\kappa)_+ = -2\Gamma - O\left(\frac{1}{\Gamma}\right) \rightarrow -\infty \quad (\text{A.21})$$

$$\operatorname{Im}(\kappa)_- = O\left(\frac{1}{\Gamma}\right) \rightarrow 0 \quad (\text{A.22})$$



ANEXO B. Diferentes tipos de transformada de Fourier.



ANEXO B. Diferentes tipos de transformada de Fourier.

Serie de Fourier.

Considérese la representación en serie de Fourier siguiente (Champney, 1987):

$$f(x) = \frac{\Delta k}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \hat{F}_n e^{ik_n x} \quad (\text{B.1})$$

donde n es un número entero, $k_n = n\Delta k$ un número de onda discreto y Δk un incremento constante del número de onda.

El cálculo de los coeficientes de Fourier se realiza de la forma siguiente:

$$\hat{F}_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/\Delta x}^{\pi/\Delta x} f(x) e^{-in k_0 x} dx \quad ; \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (\text{B.2})$$

Como puede observarse, $f(x)$ es continua en el dominio físico, aunque puede desplegar discontinuidades aisladas. En forma más precisa, $f(x)$ debe ser continua por tramos, y \hat{F}_n resulta ser discreta en el dominio de Fourier.

Por construcción, $f(x)$ es periódica y su periodo es $2\pi/k_0$. El par de Fourier (B.1)-(B.2) es útil cuando el dominio físico es finito.

Transformada de Fourier

Considérese la representación integral de Fourier siguiente (Champney, 1987):

$$f(x) \equiv \mathfrak{F}^{-1}\{f\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{-ikx} dk \quad ; \quad x \in (-\infty, \infty) \quad (\text{B.3})$$

donde $k \in (-\infty, \infty)$ representa un número de onda continuo.

La representación anterior es conocida como la integral de Fourier, o como la transformada inversa de Fourier. La transformada directa de Fourier que permite calcular $\hat{f}(k)$ es:

$$\hat{f}(k) \equiv \mathfrak{F}\{f\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx \quad (\text{B.4})$$



El par de Fourier (B.3)-(B.4) se utiliza cuando el dominio físico es infinito, siendo una herramienta ideal para resolver problemas de valor inicial puro. Nótese que tanto la función $f(x)$ como la transformada $\bar{f}(k)$ son continuas, y que la variable física (espacial) x y la variable de Fourier (número de onda) k , también son continuas. Por otra parte, se puede hacer notar que dominio k es infinito.

Transformada discreta de Fourier

Considérese la representación discreta de Fourier siguiente:

$$f_n = \frac{\Delta k}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m=-N/2-1}^{N/2} \bar{F}_m e^{i(k_m x_n)} \quad ; \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (\text{B.5})$$

donde $\Delta k = 2\pi/N \Delta x$ representa un incremento de número de onda, siendo Δx un incremento de longitud y N el número par de puntos de muestreo; $k_m = (2\pi m)/(N \Delta x)$ es un número de onda discreto; $x_n = n \Delta x$.

La representación (B.5) es conocida como la transformada inversa discreta de Fourier, y la transformada discreta directa está dada por:

$$\bar{F}_m = \frac{\Delta x}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-N/2-1}^{N/2} f_n e^{-i(k_m x_n)} \quad ; \quad m = 0, 1, \dots, N-1 \quad (\text{B.6})$$

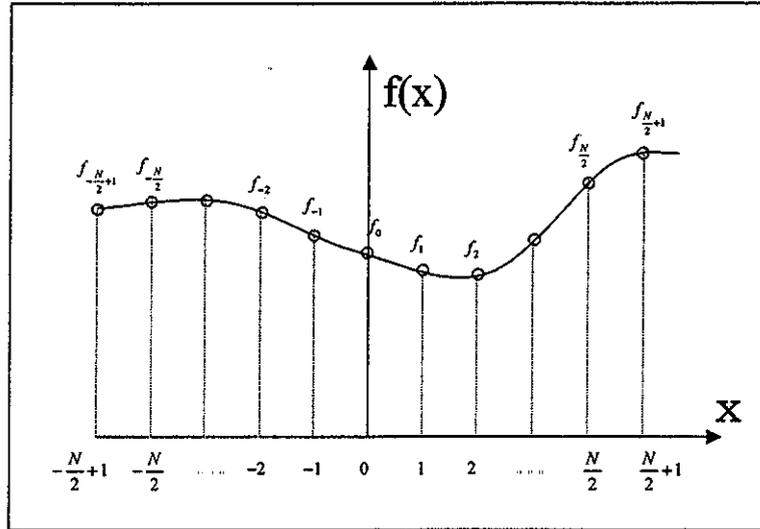
Una manera de emplear la transformada discreta de Fourier se puede ilustrar con el siguiente ejemplo. Sean los valores discretos de muestreo $f_n = f(n \Delta x)$ en el espacio discreto $x_n = n \Delta x$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N/2$, como se puede observar en la lámina B.1. Entonces, la transformada discreta de Fourier \bar{F}_n sería de la forma, como se muestra en la lámina B.2.

Por construcción, tanto f_n como \bar{F}_n son periódicas con periodo N . Entonces $f_{n+m} = f_n$ y $\bar{F}_{n+m} = \bar{F}_n$. Por otra parte, si $L = n \Delta x$ esto implica que $2\pi/L = 2\pi/n \Delta x$ y, para representar un número de onda cualquiera, se tiene que:

$$\begin{aligned} k_m x_n &= m k_0 n \Delta x \\ &= m \frac{2\pi}{N \Delta x} n \Delta x \\ &= \frac{2\pi m n}{N} \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$



TESIS CON FALLA DE ORIGEN



Lamina B.1. Valores de muestreo.

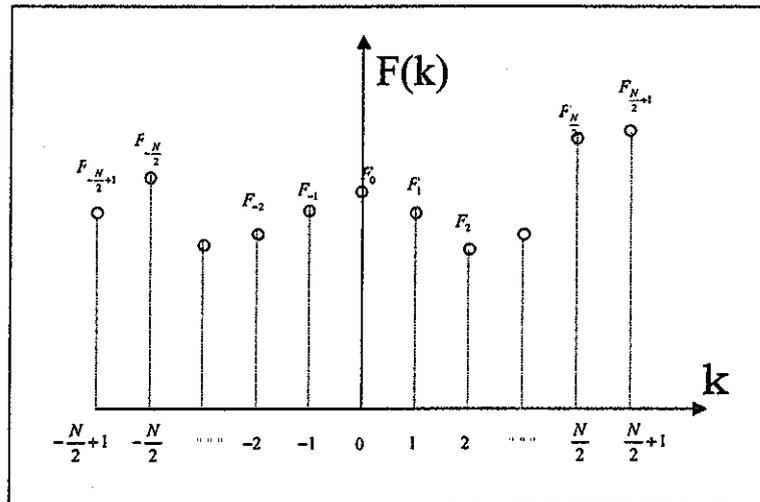


Lámina B.2. Representación discreta de Fourier.

Se puede hacer notar en este caso que la variables espacial (x_n), como el número de onda (k_m), son discretos. Asimismo, tanto f_n como $\overline{F_n}$ son discretos. Finalmente, tanto el dominio x_n como el de k_m son finitos (tomando sólo un periodo en cada caso).

Transformada semidiscreta de Fourier.

Cuando se desea analizar el comportamiento de esquemas de diferencias para resolver problemas de valor inicial puros, es necesario trabajar valores discretos en dominio físico, si bien los índices que identifican las posiciones nodales pueden adquirir cualquier valor entero. Por ello es conveniente desarrollar una



representación en serie de Fourier, en el dominio de los números de onda, como sigue:

$$\begin{aligned}\hat{f}(k) &= \frac{\Delta x}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} f_n e^{ikx_n} \\ &= \frac{\Delta x}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} f_n e^{ikn\Delta x}\end{aligned}\quad (\text{B.8})$$

donde f_n se evalúa de la forma siguiente:

$$f_n = \int_{-\pi/\Delta x}^{\pi/\Delta x} \hat{f}(k) e^{ikx_n} dk \quad (\text{B.9})$$

Como puede observarse, \hat{f}_n es continua y periódica, con un periodo $2\pi/\Delta x$, y f_n es discreta.

Para la aplicación de f_n se requiere que se pueda evaluar $\|\hat{f}_n\|_1$, y que además exista $l_1 = \|f_n\|_1$, con lo cual se asegura la convergencia de la suma infinita y de la integral. Entonces sustituyendo (B.9) en (B.1)

$$\begin{aligned}\int_{-\pi/\Delta x}^{\pi/\Delta x} \hat{f}(k) e^{ikx_m} dk &= \frac{\Delta x}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/\Delta x}^{\pi/\Delta x} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} (f_n e^{-ikx_n}) e^{ikx_m} dk \\ &= \frac{\Delta x}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} f_n \int_{-\pi/\Delta x}^{\pi/\Delta x} e^{-ikx_n} e^{ikx_m} dk \\ &= \frac{\Delta x}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} f_n \int_{-\pi/\Delta x}^{\pi/\Delta x} e^{-ik(n-m)\Delta x} dk\end{aligned}\quad (\text{B.10})$$

La integral (B.10) tiene dos posibles soluciones, si $m \neq n$:

$$\begin{aligned}\int_{-\pi/\Delta x}^{\pi/\Delta x} e^{-ik(n-m)\Delta x} dk &= \frac{i}{(m-n)\Delta x} e^{ik(m-n)\Delta x} \Big|_{-\pi/\Delta x}^{\pi/\Delta x} \\ &= \frac{i}{(m-n)\Delta x} [e^{i\pi(m-n)} - e^{-i\pi(m-n)}] \\ &= -\frac{2}{(m-n)\Delta x} \text{sen}[\pi(m-n)] = 0\end{aligned}\quad (\text{B.11})$$





si $m = n$

$$\begin{aligned}
 \int_{-\pi/\Delta x}^{\pi/\Delta x} e^{-ik(n-m)\Delta x} dk &= \int_{-\pi/\Delta x}^{\pi/\Delta x} dk \\
 &= k \Big|_{-\pi/\Delta x}^{\pi/\Delta x} \\
 &= \frac{2\pi}{\Delta x}
 \end{aligned}
 \tag{B.12}$$

Sustituyendo las integrales (B.11) y (B.12) en (B.10), se tiene

$$\begin{aligned}
 \int_{-\pi/\Delta x}^{\pi/\Delta x} \hat{f}(k) e^{ikx_m} dk &= \frac{\Delta x}{\sqrt{2\pi}} \frac{2\pi}{\Delta x} \delta_{mn} \\
 &= \sqrt{2\pi} f_m
 \end{aligned}
 \tag{B.13}$$

Al par de (B.8) y (B.9) se le denomina un par semidiscreto de Fourier. La tabla B.1 resume los pares de Fourier y sus propiedades.

La gran limitación de cualquier técnica de Fourier es que sólo es aplicable a problemas lineales de coeficientes constantes (para los que se considera cualquier interacción lineal de modos de Fourier). En otras palabras, las técnicas de Fourier son solamente aplicables cuando es válido el principio de superposición.

Caso	Tipo de par	x	k	$f(x)$	$f(k)$	Dominio físico	Dominio de Fourier	Aplicación
a)	Serie de Fourier en el dominio físico	Continua	discreta	continua periódica	discreta aperiódica	continuo finito	discreto infinito	Problemas continuos de valores en la frontera
b)	Transformada continua de Fourier	Continua	continua	continua aperiódica	continua aperiódica	continuo infinito	continuo infinito	Problemas continuos de valor inicial puro
c)	Transformada discreta de Fourier	Discreta	discreta	discreta periódica	discreta periódica	discreto finito	discreto finito	Problemas discretos de valores en la frontera (periódicas)
d)	Serie de Fourier en el dominio de números de onda	Discreta	discreta	discreta periódica	discreta periódica	discreto infinito	continuo finito	Problemas discretos de valor inicial puro

Tabla B.1. Clasificación de par de Fourier.

TESIS CON FALLA DE ORIGEN